Республиканская олимпиада по математике, 2003 год, 9 класс

1. Найдите действительные числа x, y, z, t, для которых одновременно выполняются соотношения а) и б): а) $x+y+z=1,!5$; б) $\sqrt{4x-1}+\sqrt{4y-1}+\sqrt{4z-1}\geq 2+3^{\sqrt{t-2}}$.

2. Докажите, что число $C_{2p}^{p}-2$ делится на p^2. для любого простого p, где $C_{2p}^{p}=\frac{(2p)!}{(p!)^2}$.

3. В $\triangle ABC$ известно, что $\angle C>10^\circ$ и $\angle B=\angle C+10^\circ$. Рассмотрим точки E,D на отрезках AB и AC соответственно такие, что $\angle ACE=10^\circ$ и $\angle ABD=15^\circ$. Пусть точка Z, отличная от точки A, является точкой пересечения описанных окружностей треугольников ABD и AEC. Докажите, что $\angle ZBA>\angle ZCA$.

4. Найдите все множества действительных чисел, удовлетворяющие условию: вместе с каждым числом x, множество содержит также число $3|x|-4x^2-1$.

5. $a_1,a_2,\dots,a_{101}$ — перестановка чисел $2,3,4,\dots,102$ такая, что a_k делится на k для каждого k. Найдите все такие перестановки.

6. В остроугольном треугольнике точки D и E являются основаниями высот, опущенных из вершин A и B соответственно, $AC>BC$ и $AB=2DE$. Обозначим через O и I соответственно центры описанной и вписанной окружностей треугольника. Найдите угол $\angle AIO$.

7. Найдите все целые значения чисел a,b, при которых число $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{a}}{\sqrt{3}+\sqrt{b}}$ является рациональным.

8. В королевстве 16 городов. Король хочет построить такую систему дорог, чтобы из каждого города можно было попасть в каждый, минуя не более одного промежуточного города, и чтобы из каждого города выходило не более 5 дорог. а) Докажите, что это возможно. б) Докажите, что если в формулировке заменить число 5 на число 4, то желание короля станет неосуществимым.