Республиканская олимпиада по математике, 2003 год, 11 класс

1. Найдите все натуральные числа n для которых уравнение

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + ... + \frac{1}{x_n^2} = \frac{n+1}{x_{n+1}^2}$$

имеет решение в натуральных числах.

2. Для положительных действительных чисел x, y, z докажите неравенство:

$$\frac{x^3}{x+y} + \frac{y^3}{y+z} + \frac{z^3}{z+x} \geq \frac{xy+yz+zx}{2}.$$

3. Из листа бумаги вырезали два квадрата площади 2003. Каждый квадрат разделен на 2003 непересекающихся многоугольника площади 1. Затем два квадрата накладывают друг на друга. Докажите, что полученный двойной слой бумаги можно проколоть иголкой 2003 раз таким образом, что каждый многоугольник на каждом квадрате будет проколот по одному разу.

4. Пусть вписанная окружность ω треугольника ABC касается стороны BC в точке A'. Пусть AA' пересекает ω в точке $P \neq A$. Пусть CP и BP пересекают ω соответственно в точках N и M, отличных от P. Докажите, что AA', BN и CM пересекаются в одной точке.

5. Докажите, что число $C_{2p}^p - 2$ делится на p^3, для любого простого $p \geq 5$, где $C_{2p}^p = \frac{(2p)!}{(p!)^2}$.

6. Пусть точка B лежит на окружности S_1 и пусть точка A, отличная от точки B, лежит на касательной к окружности S_1, проходящей через точку B. Пусть точка C выбрана вне окружности S_1, так, что отрезок AC пересекает S_1 в двух различных точках. Пусть окружность S_2 касается прямой AC в точке C и окружности S_1 в точке D, на противоположной стороне от точки B относительно прямой AC. Докажите, что центр описанной окружности треугольника BCD лежит на описанной окружности треугольника ABC.

7. Клетчатая доска размера $n \times n$, где n является нечетным натуральным числом, покрашена в шахматном порядке так, что угловые клетки оказались черными. При каких значениях n все черные клетки данной доски можно покрыть трехклеточными уголками без наложения? Для каждого значения n, при которых выполняется данное условие, чему равно минимальное число уголков?

8. Найдите все такие функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что при любых действительных x, y выполняется тождество $f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x)$.