Республиканская олимпиада по математике, 2003 год, 10 класс

1. Для положительных действительных чисел x, y, z докажите неравенство:

$$\frac{x^3}{x+y} + \frac{y^3}{y+z} + \frac{z^3}{z+x} \geq \frac{xy+yz+zx}{2}.$$

2. Пусть в остроугольном треугольнике ABC точки M и N являются внутренними точками сторон AC и BC соответственно, а K — серединой отрезка MN. D является точкой пересечения описанных окружностей треугольников CAN и BCM , отличной от точки C. Докажите, что прямая CD проходит через центр описанной окружности треугольника ABC тогда и только тогда, когда серединный перпендикуляр отрезка AB проходит через точку K.

3. Заданы две последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ по следующему правилу:

$$a_0 = b_0 = 0, \;\; a_n = a_{n-1}^2 + 3, \;\; b_n = b_{n-1}^2 + 2^n.$$

Что больше a_{2003} или b_{2003}?

4. Из листа бумаги вырезали два квадрата площади 2003. Каждый квадрат разделен на 2003 непересекающихся многоугольника площади 1. Затем два квадрата накладывают друг на друга. Докажите, что полученный двойной слой бумаги можно проколоть иголкой 2003 раз таким образом, что каждый многоугольник на каждом квадрате будет проколот по одному разу.

5. Дан треугольник ABC с острыми углами B и C. В него вписан прямоугольник $KLMN$ так, что точки L и M лежат на сторонах AB и AC соответственно, а точки N и K — на стороне CB. Точка O — центр прямоугольника. Прямые BO и CO пересекают стороны прямоугольника MN и LK в точках C_1 и B_1 соответственно. Докажите, что прямые AO, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

6. Докажите, что число $C_{2p}^p - 2$ делится на p^3, для любого простого $p \geq 5$, где $C_{2p}^p = \frac{(2p)!}{(p!)^2}$.

7. Найдите все функции $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, удовлетворяющие уравнению $f(xf(y)) = f(xy) + x$, для всех $x, y \in \mathbb{R}^+$, где $\mathbb{R}^+$ обозначает множество положительных действительных чисел.

8. Клетчатая доска размера $n \times n$, где n является нечетным натуральным числом, покрашена в шахматном порядке так, что угловые клетки оказались черными. При каких значениях n все черные клетки данной доски можно покрыть трехклеточными уголками без наложения? Для каждого значения n, при которых выполняется данное условие, чему равно минимальное число уголков?