

Республиканская олимпиада по математике, 2002 год, 9 класс

1. Дан квадрат $ABCD$ со стороной 1. На сторонах BC и CD выбраны соответственно точки M и N так, что периметр треугольника MCN равен 2. Найдите расстояние от A до MN .

2. В окружность вписаны правильные 2001-угольник и 2002-угольник. Докажите, что найдутся две вершины этих многоугольников, образующие дугу величиной не более $\frac{\pi}{4006002}$.

3. Пусть p, q — натуральные числа такие, что $1 \leq q \leq p$ и $a = (p + \sqrt{p^2 + q})^2$. Докажите, что a — иррациональное число и $\{a\} > 0, !75$. Здесь $\{x\}$ — дробная часть числа x , например $\{3, !43\} = 0, !43$.

4. Пусть $n \geq 2$ — целое и

$$E = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - \dots - x_{n-1}x_n - x_nx_1.$$

Найдите максимальное значение E при $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, 1]$ и определите когда достигается этот максимум.

5. Два игрока играют с двумя кучами камней: в первой 2001, а во второй 2002 камня. За ход игроку разрешается взять с обеих куч по одному камню либо только с одной кучи один камень. Выигрывает тот, кто возьмет последний камень. Какой игрок выиграет при правильной стратегии?

6. В треугольнике ABC $\angle B > 90^\circ$ и на стороне AC для некоторой точки H $AH = BH$ причем прямая BH перпендикулярна BC . Обозначим через D и E середины сторон AB и BC соответственно. Прямая, проведенная через H и параллельная AB пересекает DE в точке F . Докажите, что $\angle BCF = \angle ACD$.

7. Дана клетчатая доска $n \times n$, раскрашенная в шахматном порядке. На доске разрешается проводить следующую операцию: выбрать прямоугольник оба размера которого имеют одинаковую четность, но не равны одновременно 1, и поменять цвета всех клеток в этом

прямоугольнике на противоположные. Найдите все значения n при которых за конечное число операций доску можно сделать одноцветной.

8. Пусть $a, b, c, a + b - c, a + c - b, b + c - a, a + b + c$ — различные простые числа такие, что сумма двух чисел из $\{a, b, c\}$ равна 800. Обозначим через d разность между наибольшим и наименьшим этих семи чисел. Найдите максимально возможное значение d .