Республиканская олимпиада по математике, 2002 год, 11 класс

1. Пусть O — центр вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся стороны BC. Пусть M — середина AC, и P — точка пересечения MO и BC. Докажите, что $AB = BP$, если $\angle BAC = 2\angle ACB$.

2. Докажите, что для любых действительных чисел x_1, x_2, ..., x_n справедливо неравенство:

$$\frac{x_1}{1+{x_1}^2} + \frac{x_2}{1+{x_1}^2+{x_2}^2} + \cdots + \frac{x_n}{1+{x_1}^2+\cdots+{x_n}^2} < \sqrt{n}.$$

3. Дана последовательность целых чисел $A = (a_1, a_2, ..., a_{2001})$ (возможно с равными членами). Обозначим через m количество троек (a_i, a_j, a_k), где $1 \le i < j < k \le 2001$, таких что $a_j = a_i+1$ и $a_k = a_j + 1$. Найдите максимально возможное значение m.

4. Докажите, что существует множество A состоящее из 2002 различных натуральных чисел, удовлетворяющее условию: для каждого $a \in A$ произведение всех чисел из A, кроме a, при делении на a дает остаток 1.

5. На плоскости дан остроугольный треугольник ABC. Пусть A_1 и B_1 — основания высот опущенных из вершин A и B соответственно. Касательные в точках A_1 и B_1, проведенные к окружности описанной около треугольника CA_1B_1 пересекаются в точке M. Докажите, что окружности, описанные около треугольников AMB_1, BMA_1 и CA_1B_1 имеют общую точку.

6. Найдите все многочлены $P(x)$ с вещественными коэффициентами, удовлетворяющие тождеству $P(x^2) = P(x)P(x+1)$.

7. Докажите, что при любых целых $n > m > 0$ число $2^n - 1$ имеет простой делитель, не делящий $2^m - 1$.

8. В ряд выстроены n кузнечиков. В любой момент разрешается одному кузнечику перепрыгнуть ровно через двух кузнечиков стоящих справа или слева от него. При каких n кузнечики могут перестроиться в обратном порядке? *(А. Кунгожин)*