Республиканская олимпиада по математике, 2002 год, 10 класс

1. Назовем фигуру *крестиком*, если она получается удалением угловых клеток из таблицы 3×3. Какое наибольшее число крестиков можно без наложений расположить на квадратной доске 8×8?

2. Докажите, что для любых действительных чисел $x_1, x_2, ..., x_n$ справедливо неравенство:

$$\frac{x_1}{1+{x_1}^2} + \frac{x_2}{1+{x_1}^2+{x_2}^2} + ... + \frac{x_n}{1+{x_1}^2+...{x_n}^2} < \sqrt{n}.$$

3. Найдите наименьшее число c, удовлетворяющее следующему свойству: на сторонах любого треугольника с периметром 1 можно найти две точки, делящие периметр пополам и отстоящие друг от друга на расстоянии не больше c.

4. Докажите, что существует множество A состоящее из 2002 различных натуральных чисел, удовлетворяющее условию: для каждого $a \in A$ произведение всех чисел из A, кроме a, при делении на a дает остаток 1.

5. Найти все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которых при любых вещественных x и y справедливо равенство $f(x^2 + f(y)) = (x - y)^2 \cdot f(x + y)$.

6. На плоскости дан остроугольный треугольник ABC. Пусть A_1 и B_1 — основания высот опущенных из вершин A и B соответственно. Касательные в точках A_1 и B_1, проведенные к окружности описанной около треугольника CA_1B_1 пересекаются в точке M. Докажите, что окружности, описанные около треугольников AMB_1, BMA_1 и CA_1B_1 имеют общую точку.

7. Пусть a, b, c, $a + b - c$, $a + c - b$, $b + c - a$, $a + b + c$ — различные простые числа такие, что сумма двух чисел из a, b, c равна 800. Обозначим через d разность между наибольшим и наименьшим этих семи чисел. Найдите максимально возможное значение d.

8. В ряд выстроены n кузнечиков. В любой момент разрешается одному кузнечику перепрыгнуть ровно через двух кузнечиков стоящих справа или слева от него. При каких n кузнечики могут перестроиться в обратном порядке? *(А. Кунгожин)*