

Республиканская олимпиада по математике, 2001 год, 9 класс

1. Решить уравнение в вещественных числах $x^5 - y^5 = x^3 - y^3 = x - y$.
2. Пусть M середина стороны BC треугольника ABC . На прямой AC отмечены несовпадающие точки L и N такие, что $AL = CN$ и $CL = AN$. Докажите, что прямые LM и MN при пересечении с прямой AB образуют равноудаленные точки относительно A и B соответственно.
3. Поле для игры в «морской бой» имеет форму квадрата размером 8×8 клеток. В клетках поля устанавливаются детекторы, показывающие, накрывает ли корабль эту клетку. После этого на поле ставится корабль, имеющий форму прямоугольника 1×4 . Какое наименьшее число клеток нужно снабдить детекторами, чтобы по их показаниям можно было однозначно определить положение корабля?
4. На сферической планете Цорк имеется несколько городов и авиалиний, соединяющих эти города. У каждого города имеется город-побратим (это город, который симметричен данному относительно центра планеты). Известно, что если существует авиалиния, соединяющая города P и Q , тогда существует авиалиния, соединяющая города P' и Q' , которые являются городами-побратимами для P и Q соответственно. Также известно, что из любого города можно попасть в любой другой, пользуясь авиалиниями. Стоимость тонны топлива в двух городах, соединяемых авиалинией, отличается не более чем на 50 золотых монет. Докажите, что найдутся два города-побратима, в которых стоимость тонны топлива отличается не более чем на 50 золотых монет.
5. Даны две окружности, которые имеют хотя бы одну общую точку. Точка M называется *особой*, если две различные прямые l и m , проходящие через M и образующие при пересечении прямой l с первой окружностью точки A и B , а при пересечении прямой m со второй окружностью точки C и D такие, что получаемые четыре точки лежат на одной окружности. Найдите геометрическое место всех особых точек.
6. Пусть положительные числа a , b и c удовлетворяют неравенству $abc \geq \frac{1}{64}$. Докажите, что

$$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{1}{4}(a + b + c) \geq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}{4}.$$

7. В семье имеется четверо детей, возраст каждого из которых представляет собой натуральное число, не большее чем 16, причем все возрасты различны. Сегодня квадрат возраста самого старшего из детей равен сумме квадратов возрастов трех оставшихся. Ровно через год сумма квадратов возрастов самого старшего и самого младшего из детей станет равной сумме квадратов возрастов двух оставшихся. Сколько лет каждому из детей сегодня?
8. Чемпионат среди n футбольных команд организован так, что любые две команды встречаются между собой ровно один раз. Каждый матч проходит в воскресный день, и каждая команда играет не более одного раза в день. Какое наименьшее количество воскресных дней понадобится, чтобы завершить чемпионат?