Республиканская олимпиада по математике, 2001 год, 10 класс

1. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n таких, что $2^n + 3^n$ делится на n.

2. Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяет следующим условиям: а) $|f(a) - f(b)| \leq |a - b|$, для любых $a, b \in \mathbb{R}$; б) $f(f(f(0))) = 0$. Докажите, что $f(0) = 0$.

3. В окружность с центром O вписан четырехугольник $ABCD$, отличный от трапеции. Пусть M — точка пересечения диагоналей, K — точка пересечения окружностей, описанных около треугольников BMC и DMA, L — точка пересечения окружностей, описанных около треугольников AMB и CMD, где K, L и M различные точки. Докажите, что вокруг четырехугольника $OLMK$ можно описать окружность.

4. Докажите, что для любых положительных действительных чисел a, b и c, удовлетворяющих условию $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$, справедливо неравенство

$$\frac{a^2 + bc}{a + b} + \frac{b^2 + ca}{b + c} + \frac{c^2 + ab}{c + a} \geq 9.$$

5. Найдите все такие многочлены $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$ $(a_0 \neq 0)$ с целыми коэффициентами, что для всех $i = 0, 1, ..., n - 1$ выполняется $p(a_i) = 0$, более того $p(x) = (x - a_0)(x - a_1) ... (x - a_{n-1})$.

6. Пусть на прямой AC треугольника ABC фиксируется точка M, отличная от середины AC. Для любой точки K прямой BM, отличной от B и M строится прямая LN такая, что L является точкой пересечения AK и BC, а N является точкой пересечения CK и AB. Докажите, что все такие прямые LN пересекаются в одной точке.

7. Каждая внутренняя точка равностороннего треугольника, стороны которого равны 1, лежит в одной из шести окружностей одинакового радиуса r. Доказать, что $r \geq \frac{\sqrt{3}}{10}$.

8. Чемпионат среди n футбольных команд организован так, что любые две команды встречаются между собой ровно один раз. Каждый матч проходит в воскресный день, и каждая команда играет не более одного раза в день. Какое наименьшее количество воскресных дней понадобится, чтобы завершить чемпионат?