Республиканская олимпиада по математике, 2000 год, 9 класс

1. Дан четырехугольник $PQRS$ вокруг которого можно описать окружность и $\angle PSR = 90^\circ$. H и K — основания перпендикуляров, опущенных из точки Q на прямые PR и PS соответственно. Доказать, что прямая HK делит отрезок QS пополам.

2. Столбцы и строки таблицы $n \times n$ занумерованы числами от 1 до n. В каждой клетке таблицы записывается одно из чисел 1 или -1. а) Найдите все n, для которых можно записать числа в таблицу так, чтобы произведения чисел любой строки и столбца, с одинаковыми номерами, были различными. б) Для всех таких n (удовлетворяющих условию а)), определить наименьшее возможное количество чисел, равных -1.

3. Пусть a, b и c положительные действительные числа, удовлетворяющие равенству $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Докажите неравенство

$$a + b + c + \frac{1}{abc} \geq 4\sqrt{3}.$$

4. В стране имеется 14 областных центров и 79 самолетов. Ввиду экономии авиакеросина каждый самолет может летать только между двумя городами, и между любыми двумя городами летает не более одного самолета. Доказать, что пассажир может попасть из любого областного центра в любой другой не более чем с одной пересадкой.

5. Известно, что все члены бесконечной последовательности

$$a - b, a^2 - b^2, a^3 - b^3, \dots$$

являются натуральными числами. Докажите, что a и b — целые числа.

6. Прямоугольник $5 \times n$ можно разбить на фигурки, которые получаются удалением какой-либо угловой клетки прямоугольника 2×3. Докажите, что n четно.

7. Вокруг треугольника ABC описана окружность. A', B', C' соответственно середины дуг BC, CA, AB. Стороны BC, CA, и AB пересекают пары отрезков $(C'A', A'B')$, $(A'B', B'C')$ и $(B'C', C'A')$в парах точек (M, N), (P, Q) и (R, S) соответственно. Докажите, что $MN = PQ = RS$ тогда и только тогда, когда треугольник ABC равносторонний.

8. Для четверки чисел (a, b, c, d) назовем число $(ac - bd)$ — определителем и $(a - c)(b - d)$ — дополнителем. Школьники по очереди выходят к доске и записывают определитель и дополнитель четверки, затем заменяют четверку по следующему правилу. Если на доске была написана четверка (x, y, z, t), то она заменяется на $(x + y, y + z, z + t, t + x)$. Первоначальная четверка целочисленная. Через некоторое количество выходов выяснилось, что сумма определителей равна 1999, а сумма дополнителей 2000. Доказать, что определитель первоначальной четверки отличается от дополнителя последней.