Республиканская олимпиада по математике, 2000 год, 11 класс

1. Двое ребят играют в игру «Морской бой-2000». На доске 1×200 они по очереди ставят на свободные клетки доски букву «S» или «O». Выигрывает тот кто первым получает слово «SOS». Докажите, что при правильной игре выигрывает второй игрок.

2. Дана окружность с центром в точке O и две точки A и B, лежащие на ней. A и B не образуют диаметр. На окружности выбрана точка C так, что прямая AC делит отрезок OB пополам. Пусть прямые AB и OC пересекаются в точке D, а прямые BC и AO — в точке F. Доказать, что $AF = CD$.

3. В некотором государстве с n $(n \geq 3)$ аэропортами правительство выдает лицензию на авиаперевозки только тем авиакомпаниям, система авиалиний которых удовлетворяет следующим условиям: а) Каждая авиакомпания должна соединять любые два аэропорта одной и только одной односторонней авиалинией; б) Для каждой авиакомпании найдется аэропорт, с которого пассажир мог бы вылететь и прилететь обратно, пользуясь услугами только этой авиакомпании. Каково максимальное количество авиакомпаний с различными системами авиалиний?

4. Найдите все тройки натуральных чисел (x, y, z), удовлетворяющие условию $(x+1)^{y+1} + 1 = (x+2)^{z+1}$.

5. Пусть число p является простым делителем числа $2^{2^k} + 1$. Доказать, что $p - 1$ делится на 2^{k+1}.

6. Для положительных чисел a, b и c, удовлетворяющих равенству $a + b + c = 1$ доказать неравенство
$$\frac{a^7 + b^7}{a^5 + b^5} + \frac{b^7 + c^7}{b^5 + c^5} + \frac{c^7 + a^7}{c^5 + a^5} \geq \frac{1}{3}.$$

7. Существует ли функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая следующим условиям?

   - $f(0) = 1$;

- $f(x + f(y)) = f(x + y) + 1$, для всех $x, y \in \mathbb{R}$;
- Существует рациональное, но не целое число x_0 такое, что $f(x_0)$ является целым.

8. Дан треугольник ABC и точка M внутри него. Доказать, что

$$\min\{MA, MB, MC\} + MA + MB + MC < AB + BC + AC.$$