Республиканская олимпиада по математике, 2000 год, 10 класс

1. Пусть a, b и c положительные действительные числа, удовлетворяющие равенству $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Докажите неравенство

$$a + b + c + \frac{1}{abc} \geq 4\sqrt{3}.$$

2. Имеется n городов и несколько самолетов. Каждый самолет летает только между двумя городами и между любыми двумя городами летает не более одного самолета. Найти минимальное количество самолетов так, чтобы при любой организации авиарейсов из каждого города можно попасть в любой другой не более чем с одной пересадкой.

3. Пусть точка O является центром окружности. Две равные хорды AB и CD пересекаются в точке L таким образом, что $AL > LB$ и $DL > LC$. Пусть M и N соответственно точки на отрезках AL и DL такие, что $\angle ALC = 2\angle MON$. Доказать, что хорда окружности, проходящая через точки M и N равна AB и CD.

4. Докажите, что для любого натурального k найдется бесконечно много таких натуральных чисел m, что $m^3 + 1999$ делится на 3^k.

5. Прямоугольник $5 \times n$ можно разбить на фигурки, которые получаются удалением какой-либо угловой клетки прямоугольника 2×3. Докажите, что n четно.

6. Найдите все функции $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ такие, что

$$f(x + y) = f(x)f(y) - f(xy) + 1$$

для всех целых x и y. Здесь $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел.

7. Дан треугольник ABC и точка M внутри него. Доказать, что

$$\min\{MA, MB, MC\} + MA + MB + MC < AB + BC + AC.$$

8. Пусть число p является простым делителем числа $2^{2^k} + 1$. Доказать, что $p - 1$ делится на 2^{k+1}.