Республиканская олимпиада по математике, 1999 год, 9 класс

1. Два ученика по очереди заменяют знак «$\cdot$» на знак «$+$» или «$-$» в выражении $1\cdot 3\cdot 3^2\cdot 3^3\cdot \ldots \cdot 3^{1999}$. Цель второго ученика — в итоге получить число, делящееся на 11. Сможет ли первый ученик помешать ему в этом?

2. Найдите все попарно различные цифры a, b, c, d удовлетворяющее уравнению $\overline{abccba}=\overline{cda}^2$.

3. По кругу расположили восемь свечей, некоторые из них горят. Каждую минуту ко всем свечам применяют такую операцию: если до операции у какой-то свечи одна из соседних свечей горит, а вторая нет, то эту свечу тушат. И наоборот, если обе соседние свечи одновременно горят или потушены, то эту свечу зажигают. Докажите, что через четыре минуты все свечи будут гореть.

4. Дан прямоугольник $ABCD$ с большей стороной AB. Окружность с центром в точке B с радиусом AB пересекает прямую CD в точках E и F. Докажите, что: а) окружность, описанная около треугольника EBF, касается с окружностью с диаметром AD. б) Если G — точка пересечения этих окружностей, то точки D, G, B лежат на одной прямой.

5. Параллелепипед размером $3\times 4\times 4$ нужно разрезать на кубики размером $1\times 1\times 1$. Если куски, полученные после разрезания, можно накладывать друг на друга, то за какое минимальное число разрезаний можно сделать?

6. Диагонали трапеции $ABCD$ взаимно перпендикулярны (AB — большее основание). Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC, а E — точка пересечения прямых OB и CD. Докажите, что $BC^2=CD\cdot CE$.

7. Для любых положительных a и b докажите неравенство: $\dfrac{a+\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{ab^2}+b}{4}\le\dfrac{a+\sqrt{ab}+b}{3}$.

8. а) Докажите, что среди любых 79 последовательных натуральных чисел есть число, сумма цифр которого делится на 13. б) Найдите 78 последовательных натуральных чисел, для которых сумма цифр каждого из них не делится на 13.