

Республиканская олимпиада по математике, 1999 год, 11 класс

1. Докажите, что для любых действительных чисел a_1, a_2, \dots, a_{100} существует такое действительное число b такое, что все числа $a_i + b$ ($1 \leq i \leq 100$) — иррациональные.
2. Докажите, что для любого нечетного n существует единственный многочлен $P(x)$ n -ой степени, удовлетворяющее уравнению $P\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^n - \frac{1}{x^n}$. Верно ли это утверждение для любого натурального n ?
3. Окружность вписанная в треугольник ABC касается сторон AB и BC в точках C_1 и A_1 соответственно. Прямые CO и AO пересекает прямую C_1A_1 в точках K и L . M — середина AC и $\angle ABC = 60^\circ$. Доказать, что KLM — правильный треугольник.
4. В одном доме живут семь гномов и у каждого есть своя шляпа. В один день утром два гнома по неосторожности поменялись шляпами. В любое время любые три гнома могут сесть за круглый стол и обменяться шляпами по часовой стрелке. Возможно ли, что к вечеру все гномы будут при своих шляпах.
5. Для действительных чисел x_1, x_2, \dots, x_n и y_1, y_2, \dots, y_n выполнены неравенства $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n > 0$ и

$$y_1 \geq x_1, y_1 y_2 \geq x_1 x_2, \dots, y_1 y_2 \dots y_n \geq x_1 x_2 \dots x_n.$$

Докажите, что $ny_1 + (n-1)y_2 + \dots + y_n \geq x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n$.

6. В последовательности натуральных чисел $a_1, a_2, \dots, a_{1999}$, $a_n - a_{n-1} - a_{n-2}$ делится на 100 ($3 \leq n \leq 1999$). Известно, что $a_1 = 19$ и $a_2 = 99$. Найдите остаток от деления числа $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{1999}^2$ на 8.
7. На сфере с радиусом 1 дана точка P . Три взаимно перпендикулярные луча, выходящие из точки P , пересекают сферу в точках A , B и C . Докажите, что все такие возможные плоскости ABC проходят через фиксированную точку, и найдите максимальную возможную площадь треугольника ABC .

8. Пусть a_1, a_2, \dots, a_n является перестановкой чисел $1, 2, \dots, n$, где $n \geq 2$.
Найдите максимальное значение суммы

$$S(n) = |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_{n-1} - a_n|.$$