Республиканская олимпиада по математике, 1999 год, 10 класс

1. Докажите, что для любых действительных чисел a_1, a_2, ..., a_{100} существует действительное число b такое, что все числа $a_i + b$ $(1 \le i \le 100)$ — иррациональные.

2. Один квадрат получен поворотом второго квадрата относительно его центра на угол α $(\alpha \le \pi/4)$. При каком значении α, периметр восьмиугольника, общей части двух квадратов, имеет минимальное значение.

3. Последовательность $\{a_n\}$ определена следующим образом: $a_1 = 1$ и для любого $n \ge 2$

$$a_n = \begin{cases} a_{n-1} - n, & \text{если } a_{n-1} > n, \\ a_{n-1} + n, & \text{если } a_{n-1} \le n. \end{cases}$$

Найдите минимальное n такое, что $a_n = 1999$.

4. В стране 2000 городов, расстояние между любыми двумя из них различны. Известно, что из любых трех городов, два из них, расстояние между которыми минимально, не соединены между собой дорогой. Найдите максимальное количество дорог в этой стране.

5. Для действительных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $y_1, y_2, \dots, y_n$ выполнены неравенства $x_1 \ge x_2 \ge \dots \ge x_n > 0$ и

$$y_1 \ge x_1, \ \ y_1 y_2 \ge x_1 x_2, \ \ \dots, \ \ y_1 y_2 \dots y_n \ge x_1 x_2 \dots x_n.$$

Докажите, что $ny_1 + (n-1)y_2 + \cdots + y_n \ge x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n$.

6. а) Докажите, что среди любых 79 последовательных натуральных чисел есть число, сумма цифр которого делится на 13. б) Найдите 78 последовательных натуральных чисел, для которых сумма цифр каждого из них не делится на 13.

7. Пусть $a = (n+1)^m - n$ и $b = (n+1)^{m+3} - n$, где m и n — натуральные числа. а) Докажите, что a и b взаимно просты, если m не делится на 3. б)

Найдите все пары (m, n), для которых a и b не взаимно простые.

8. В остроугольном равнобедренном треугольнике ABC, с основанием AC, проведены высоты AA_1 и BB_1. Прямая проходящая через B и середину AA_1 пересекает описанную около треугольника ABC окружность ω в точке E. Касательная к ω в точке A пересекает прямую BB_1 в точке D. Доказать, что точки D, E, B_1 и C лежат на одной окружности.