

Задачи

Задача №1. На сторонах BC , CA , AB треугольника ABC выбраны соответственно точки K , L , M , а внутри треугольника выбрана точка P так, что

$$PL \parallel BC, \quad PM \parallel CA, \quad PK \parallel AB.$$

Может ли оказаться, что все три трапеции $AMPL$, $BKPM$, $CLPK$ — описанные?

Задача №2. Найти все натуральные a, b, c , такие что

$$[a, b, c] = \frac{ab + bc + ca}{4}.$$

Здесь $[x, y]$ — наименьшее общее кратное чисел x и y .

Задача №3. Даны 2023 шара и натуральное число k . Каждый воздушный шар был надут до определённого размера (не обязательно одинакового). На каждом шаге можно выбрать не более k шариков и приравнять их размеры к среднему арифметическому. Определите наименьшее значение k , при котором, какими бы ни были начальные размеры, можно сделать все шарики одинакового размера за конечное число шагов.

Задача №4. Пусть

$$P(x) = x^{2023} + ax^{2022} + p,$$

где a — нечётное число, а p — простое. Оказалось, что $P(x)$ можно представить в виде произведения двух многочленов с целыми коэффициентами. Найдите p .