Сборы. День 4.
4/Мая/2022

РАЗНЫЕ ЗАДАЧКИ.

Задача 1. Имеется набор положительных чисел (a, b, c, d). Из него строим набор (ab, bc, cd, da), и.т.д. Доказать, что если мы когда-нибудь придем к первоначальному набору, то $a = b = c = d = 1$.

Задача 2. Дана доска 1945×1945 и действительные различные числа $a_1, a_2, ..., a_{1945}, b_1, b_2, ..., b_{1945},$. В клетке пересечения $i-$ той строки и $j-$ того столбца стоит число $a_i + b_j$. Обозначим произведение всех чисел, стоящих в $i-$ той строке через x_i а произведение всех чисел в $j-$ том столбце через y_j . Оказалось, что $x_1 = x_2 = ... = x_{1945}$. Докажите, что $y_1 = y_2 = ... = y_{1945}$.

Задача 3. Положительные числа a, b, c, d таковы, что $a + b + c + d = 4$. Докажите, что

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} + \frac{1}{1+d^2} \geqslant 2.$$

Нельзя использовать Коши reverse.

Задача 4. Пусть простое $p = 8k + 5$. Тогда уравнение $x^2 - 2 = py$ неразрешимо в целых числах.

Задача 5. Назовем натуральное число a Бананом, если найдется такой квадратный трехчлен $f(x)$ с целыми коэффициентами, что $f(f(\sqrt{n})) = 0$. Найдите наибольшее число Банан, не превосходящее 2015.

Задача 6. Пусть a, b единственные корни уравнения (1) и (2) соответственно.

$$x^3 - 3x^2 + 2025x - 2028 = 0, (1)$$
$$x^3 - 6x^2 + 2034x - 4047 = 0.(2)$$

Чему равно $a + b$?

Задача 7. Существует ли последовательность положительных чисел $b_1, \ldots, b_n$ такая, что для любого $m \in \mathbf{N}$ выполняется:

$$b_m + b_{2m} + b_{3m} + \ldots = \frac{1}{m}$$

Задача 8. Пусть P_1, P_2, P_3, P_4 $-$ различные точки на сфере радиуса 1. Докажите, что минимум функции

$$f(P_1, P_2, P_3, P_4) = \sum_{i \neq j} \frac{1}{|P_i - P_j|}$$

достигается тогда и только тогда, когда P_i $-$ вершины правильного тетраэдра.

Задача 9. Пусть $c \in \mathbf{N}$ такое, что для любого натурального n число $2^n + 1$ делит $c^n + 1$. Обязательно ли $c = 2^{2k-1}$ для некоторого натурального k?

Производная рационального числа. Функцию $' : \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$ определим следующим образом:
1) $(p)' = 1$ для любого простого p;
2) $(mn)' = m'n + n'm$ для всех $m, n \in \mathbf{Q}$;
3) $(0)' = 0$.

Задача 10. Пусть $x^{(k)}$ $-$ $k-$ая производная. Рассмотрим последовательность $x^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Исследуйте эту последовательность: каким ограничением должен удовлетворять x, чтобы последовальность была монотонной (или ограниченной, или сходящейся)?