Сборы. День 4.
2/Мая/2022

Алгебра и ТЧ

Задача 1. Найдите все функции $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{R}$, которые при всех $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ $(k \geqslant n)$ удовлетворяют равенству

$$2f(n)f(n+k) - 2f(k-n) = 3f(n)f(k),$$

и существует неотрицательное целое число t такое, что $f(t) = 1$.

Задача 2. Найдите все функции $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{R}$, которые при всех $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ удовлетворяют равенству

$$f(n+1) - 2f(n) + f(n-1) = n+1,$$

и $f(1) = 1, f(2) = 0$.

Задача 3. Найдите все функции $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которые удовлетворяют неравенству

$$|f(y) - f(x) - g(x)(y-x)| \leqslant 117|y-x|^{117}.$$

Задача 4. Пусть p_i, $i-$тое простое число. Пусть

$$ln\frac{n}{\sqrt[p_1-1]{p_1}\cdot\sqrt[p_2-1]{p_2}\cdot\sqrt[p_3-1]{p_3}\cdot\ldots\cdot\sqrt[p_k-1]{p_k}} = a_n,$$

где $p_k \leqslant n < p_{k+1}$. Оказалось, что начиная с некоторого l верно следующие неравенство

$$ta_t > a_1 + a_2 + ... + a_t$$

где $t \geqslant l$. Тогда докажите, что верно

$$lnp_1 + lnp_2 + ... + lnp_k < n$$

начиная с l.

Разнобой

Задача 1. Найдите все n для которых многочлен $P(a_1, \ldots, a_n) = a_1^n + \ldots + a_n^n - na_{1n}$ — неприводим.

Задача 2. Существуют ли попарно различные натуральные числа $a_1, \ldots, a_n$ одновременно удовлетворяющие условиям: число $a_1 \ldots a_n$ делится на $a_i + a_j$ для любых $i \neq j$ и для каждого k найдутся такие различные индексы i и j, что число $\frac{a_1 \ldots a_n}{a_k}$ не делится на $a_i + a_j$?

Задача 3. Есть массив из n чисел. Почему самый быстрый алгоритм сортировки будет работать за $O(n \log(n))$?

Классика. Доску 6 на 6 покрыли доминошками. Докажите, что можно разрезать доску так, чтобы не разрезалось ни одно домино.