Сборы. День 1.
29/Апреля/2022

Алгебра и ТЧ

Задача 1. Найдите все положительные t такие, что

$$0.9t = \frac{[t]}{t-[t]},$$

где $[x]$– целая часть числа x.

Задача 2. Для различных неотрицательных a, b, c докажите, что

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\right) \geqslant 4.$$

Задача 3. Существуют ли целые числа x, y, не делящиеся на 5 такие, что

$$x^2+19y^2 = 198\cdot 10^{2023}?$$

Задача 4. Пусть p_i – i-ое простое число. Докажите, что

$$\sqrt[p_1-1]{p_1}\cdot\sqrt[p_2-1]{p_2}\cdot\sqrt[p_3-1]{p_3}\cdot\ldots\cdot\sqrt[p_k-1]{p_k} > \frac{2020}{3},$$

где $p_k \leqslant 2020 < p_{k+1}$

Геометрия

Задача 1. Дан треугольник ABC. Пусть (P, Q) – пара изогонально сопряженных точек, причем $PB = PC$. Отпустим перпендикуляры PE, PF, и PD на стороны AC, AB, и BC соответственно. K – середина дуги EDF окружности описанной около $\triangle DEF$. N – середина дуги BC, не содержащей A, описанной окружности ABC. Докажите, что точки K, Q, и N лежат на одной прямой.

Задача 2. Рассмотрим остроугольный треугольник ABC с высотами AD, BE, и CF. Пусть X, Y, Z – середины этих высот соответственно. D' – симметрична D относительна YZ. Аналогично определим E' и F'. Докажите, что прямые $D'X, E'Y, F'Z$ пересекаются в одной точке.

Задача 3. В треугольнике ABC отметили ортоцентр H и провели высоты AD, BE, CF. Пусть $G = EF \cap AD$ и прямые BG и CG пересекают описанную окружность во второй раз в точках X и Y соответственно. Пусть K – такова на описанной окружности, что AK – симедиана. Пусть HK пересекает описанную окружность во второй раз в точке Z. Докажите, что прямые AZ, XY, и BC пересекаются в одной точке.

Задача 4. Окружности ω_1 с центром O_1 и ω_2 с центром O_2 пересекаются в точках X и Y. Прямая O_1Y пересекает ω_2 во второй раз в точке A; Прямая O_2X пересекает ω_1 во второй раз в точке B. XA пересекает ω_1 во второй раз в C; YB пересекает ω_2 во второй раз в D. Описанные окружности DXO_2 и CYO_1 пересекают XY в точках $M \neq X$ и $N \neq Y$ соответственно. Точка P такова, что $MP = MA$ и $NP = NB$. Докажите, что описанная окружность PMN касается AD или BC.