Жаратылыстану математика бағыты бойынша
жас өспірімдер арасындағы
республикалық олимпиадасының облыстық кезеңі
(2021-2022 оқу жылы)

Пәні: математика

8-сынып

Жұмыс уақыты: 3 сағат.
Әр есеп 7 ұпайға бағаланады.

1. Натурал сандарда шешіңіз

$$5n = 2021S(n) + 2022,$$

бұл жердегі S(n) – n санының цифрларының қосындысы.

2. Оң a, b, c және d сандарының қосындысы 7-ге тең. Теңсіздікті дәлелдеңіз

$$\sqrt{a+2022b} + \sqrt{b+2022c} + \sqrt{c+2022d} + \sqrt{d+2022a} \leqslant 238.$$

3. Теңдеуді нақты сандарда шешіңіз

$$6^x + 30^x + 33^x = 45^x,$$

бұл жердегі $x \geqslant 1$.

4. $ABCD$ квадратының диагональдары O нүктесінде қиылысады. Бұрыш KLM 135° болатындандай, OA, OB, OC кесінділерінен сәйкесінше K, L, M нүктелері алынды. ML түзуі DC қабырғасын P нүктесінде қияды. K нүктесінен ML түзуіне жүргізілген перпендикуляр BC және AD қабырғаларын сәйкесінше Q және R нүктелерінде қияды. PQR үшбұрышы теңбүйірлі екенін дәлелдеңіз.

Областной этап
юниорской олимпиады по предметам
естественно-математического направления
(2021-2022 учебный год)

Предемет: математика

8 класс

Время работы: 3 часа.
Каждая задача оценивается в 7 баллов.

1. Решить в натуральных числах

$$5n = 2021S(n) + 2022,$$

где $S(n)$- сумма цифр числа n.

2. Сумма положительных чисел a, b, c и d равна 7. Докажите неравенство

$$\sqrt{a+2022b} + \sqrt{b+2022c} + \sqrt{c+2022d} + \sqrt{d+2022a} \leqslant 238.$$

3. Решите уравнение в действительных числах

$$6^x + 30^x + 33^x = 45^x,$$

где $x \geqslant 1$.

4. Диагонали квадрата $ABCD$ пересекаются в точке O. На отрезках OA, OB, OC соответственно отмечены точки K, L, M так, что угол KLM равен 135°. Прямая ML пересекает сторону DC в точке P. Прямая, проходящая через K и перпендикулярная прямой ML, пересекает стороны BC и AD в точках Q и R соответственно. Докажите, что треугольник PQR равнобедренный.

Решения и критерии оценивания районного этапа юниорской олимпиады по предметам естественно-математического направления

2021-2022 учебный год

8 класс

Общие положения по проверке работ

1. Приведённые критерии оценивания являются приблизительными. Учащиеся (как и проверяющие), возможно, смогут найти и другие верные решения. Жюри имеет право вносить изменения в критерии, проголосовав за них коллегиально. Главное, чтобы все работы участников оценивались по одинаковым критериям.

2. Перед проверкой жюри следует внимательно изучить олимпиадные задания, их решения и критерии. Желательно прорешать задания самим для возможного поиска альтернативных решений.

3. По окончании проверки обязательно надо проводить разбор и апелляцию задач, притом разборы желательно делать до апелляции и при разборе рассказывать ученикам, за что снимались баллы, а за что добавлялись. Это значительно сократить число учеников желающих подать на апелляцию.

4. В целях более справедливой оценки желательно чтобы одну задачу проверял один человек (или, согласованно, одна группа). В конце, если позволяет время, то следует перепроверить горизонтально (один человек проверяет все задачи одного школьника).

5. Следует помнить, что олимпиадная работа – это не контрольная работа. При оценивании олимпиадных работ, в отличие от оценивания типовых заданий по математике, недопустимо снимать баллы за исправления в работе, за слишком длинное решение, или если решение школьника отличается от решения, приведенного в учебных пособиях.

6. Не следует слишком строго наказывать за технические ошибки или недостатки в решении: описки, легко устранимые арифметические ошибки, непринципиальные моменты в ходе решения, напримеручастник до конца не упростил ответ, не совсем строгий порядок изложение или пропуск очевидных моментов, не влияющих в целом на ход решения. В зависимости от серьёзности ошибки или недостатка снимается не более 2 баллов, в некоторых ситуациях вообще снимать не следует.

7. Внимательно проверяйте насколько соответствует решение критериям проверки. В особенности, если решение ученика неполное и / или альтернативное официальному. Важно понять, насколько участник продвинулся по критериям, какие случае идеи он предлагает и какие факты им получены или доказаны. В альтернативного решения желательно обсудить решения и критерии для этого решения коллегиально.

8. Однако текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен оцениваться в 0 баллов. Баллы за «старание участника» не выставляются, даже если участник исписал много страниц или построил «красивый» чертёж. Если участник «угадал» правильный ответ, не приводит никаких объяснений, как он его получил, то за это не следует давать баллов.

9. Часто на олимпиадах можно встретить так называемые «счётные решения», когда участник пытается решить задачу «в лоб», опираясь только на алгебраические операции, метод координат, векторный метод, теоремы косинусов, синусов, Чевы, Менелая и т. п., не применяя никакую идею, отличного от технического счёта. Обычно такие решения (если вообще возможно решить таким способом задачу) занимают много страниц текста. К таким «счётным» решениям по сложившейся многолетней традицииприменяется следующая схема оценивания:

   - если участник смог довести своё счётное решение до конца, то он получает полные **7 баллов**;
   - если участник не довёл своё «счётное» решение до конца (независимо насколько он продвинулся) и / или допустил вычислительную ошибку — **0 баллов**.

10. На математических олимпиадах преимущественно закрепилась наилучшим образом зарекомендовавшая себя 7-балльная шкала. Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных участником. Основные принципы оценивания приведены в таблице ниже. Таблица примерная, к каждой задаче следует подходить индивидуально.

Примерные критерии оценивания задач

Баллы	**Отметка**	**Правильность (ошибочность) решения**
7	$+$	Полное верное решение.
6-7	$\underset{\cdot}{+}$	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	$\underset{\bullet}{+}$ или $\underset{-}{+}$	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	$\pm$	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	$\mp$	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	$\dot{-}$	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	$-$	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	$-$	Решение отсутствует.

Задача 8.1

Решить в натуральных числах

$$5n = 2021S(n) + 2022,$$

где $S(n)$- сумма цифр числа n.

Ответ: $\varnothing$.

Решение. Заметим, что $S(n) \equiv n \pmod 9$. Следовательно $2021S(n) \equiv 5n \pmod 9$. Значит $5n - 2021S(n) = 2022$ делится на 9. Но это не так.

Значит такого n не существует.

Примерные критерии оценивания

1. Полное решение **(7 баллов)**.

Задача 8.2

Сумма положительных чисел a, b, c и d равна 7. Докажите неравенство

$$\sqrt{a+2022b}+\sqrt{b+2022c}+\sqrt{c+2022d}+\sqrt{d+2022a}\leqslant 238.$$

Решение. По неравенству Коши-Буняковского

$$\sqrt{a+2022b}+\sqrt{b+2022c}+\sqrt{c+2022d}+\sqrt{d+2022a}=$$
$$=1\cdot\sqrt{a+2022b}+1\cdot\sqrt{b+2022c}+1\cdot\sqrt{c+2022d}+1\cdot\sqrt{d+2022a}\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2}\times$$
$$\times\sqrt{\left(\sqrt{a+2022b}\right)^2+\left(\sqrt{b+2022c}\right)^2+\left(\sqrt{c+2022d}\right)^2+\left(\sqrt{d+2022a}\right)^2}=$$
$$==\sqrt{4}\cdot\sqrt{a+2022b+b+2022c+c+2022d+d+2022a}=$$
$$=2\cdot\sqrt{2023a+2023b+2023c+2023d}=$$
$$=2\cdot\sqrt{2023(a+b+c+d)}=2\sqrt{2023\cdot 7}=$$
$$=2\sqrt{7\cdot 17^2\cdot 7}=2\cdot 7\cdot 17=238.$$

Неравенство доказано.

Примерные критерии оценивания

1. Попытки применения неравенства Коши-Буняковского **(1 балл)**.
2. Доказано, что

$$\sqrt{a+2022b}+\sqrt{b+2022c}+\sqrt{c+2022d}+\sqrt{d+2022a}\leqslant 2\cdot\sqrt{2023(a+b+c+d)}.$$

(5 баллов)

3. Доказано, что

$$\sqrt{a+2022b}+\sqrt{b+2022c}+\sqrt{c+2022d}+\sqrt{d+2022a}\leqslant 2\cdot\sqrt{2023\cdot 7}=$$
(или $=2\sqrt{14161}=\sqrt{56644}$).

(6 баллов)

7. Доказано, что

$$\sqrt{a+2022b}+\sqrt{b+2022c}+\sqrt{c+2022d}+\sqrt{d+2022a}\leqslant 2\cdot\sqrt{2023\cdot 7}=288.$$

(7 баллов)

Примечание. Баллы пунктов 1-4 не суммируются.

Задача 8.3

Решите уравнение в действительных числах

$$6^x + 30^x + 33^x = 45^x,$$

где $x \geqslant 1$.

Ответ: 2.

Решение. Поделим обе части уравнения на 33^x и получим

$$\left(\frac{6}{33}\right)^x + \left(\frac{30}{33}\right)^x + 1 = \left(\frac{45}{33}\right)^x,$$

Очевидно, что левая часть убывает при возрастание x, а правая возрастает. Значит должно быть не более одного решения. Если поставим $x = 2$ то

$$6^2 + 30^2 + 33^2 = 2025 = 45^2.$$

Таким, образом $x = 2$ — единственный корень уравнения.

Примерные критерии оценивания

1. Полное решение **(7 баллов)**.
2. Показано, что существует не более одного решения **(5 баллов)**.
3. Найден правильный ответ **(2 балла)**.

Задача 8.4

Диагонали квадрата $ABCD$ пересекаются в точке O. На отрезках OA, OB, OC соответственно отмечены точки K, L, M так, что угол KLM равен $135°$. Прямая ML пересекает сторону DC в точке P. Прямая, проходящая через K и перпендикулярная прямой ML, пересекает стороны BC и AD в точках Q и R соответственно. Докажите, что треугольник PQR равнобедренный.

Решение. Обозначим точку пересечения прямых ML и QR через T. Пусть X — середина отрезка KL. Тогда TX и OX — медианы прямоугольных треугольников KLT и KLO, то есть $XT = XK = XL = XO$. Поэтому точки O, K, T, L лежат на одной окружности с диаметром KL.

Имеем: $\angle TLK = 180° - 135° = 45°$, $\angle TXK = 2\angle TLX = 90°$, $\angle TOK = \angle TXK/2 = 45°$ (последнее верно по свойству центрального угла). Поэтому $\angle TOA = \angle OAD = 45°$ или $TO \parallel AD$.

Рассмотрим трапецию с основаниями QB и RD. В этой трапеции TO является средней линией, так как O середина BD и $TO \parallel RD \parallel QB$, то есть T — середина отрезка QR, а PT является серединным перпендикуляром отрезка QR. Поэтому $QP = RP$.

Из последнего следует, что треугольник PQR равнобедренный.

1. Доказано, что T,L,O,K лежат на одной окружности **(3 балла)**.
2. Доказано, что $TO \parallel AD$ **(2 балла)**.
3. Обоснование того, что T — середина QR **(1 балл)?**.