Жаратылыстану математика бағыты бойынша
жас өспірімдер арасындағы
республикалық олимпиадасының облыстық кезеңі
(2021-2022 оқу жылы)

Пәні: математика

7-сынып

Жұмыс уақыты: 3 сағат.
Әр есеп 7 ұпайға бағаланады.

1. Аслан 1-ден 2022-ге дейінгі сандарды қоса алғандағы 2-ге немесе 7-ге бөлінетін сандарыдың санын жазды. Алмаз 1-ден 2022-ге дейінгі сандарды қоса алғандағы 3-ке немесе 5-ке бөлінетін сандарыдың санын жазды. Кімнің саны үлкен?

2. Кез-келген нақты x және y сандары үшін теңсіздікті дәлелдеңіз

$$x^2 + (1-y)^2 + (x-y)^2 \geqslant \frac{1}{3}.$$

3. Қапта 2022 шар жатыр. Арлан мен Арман кезектесіп қаптан 1-ден 42-ге дейін қоса шарды алады. Бірінші болып Арлан бастайды. Соңғы шарды алған бала ұтылады. Арман өз жеңісіне кепілдік бере ала ма?

4. Егер үшбұрыштың төбесінен үшбұрышты екі теңбүйірлі үшбұрыштарға бөлетіндей түзу жүргізе алсақ, онда осы төбені «әдемі» деп атаймыз. ABC үшбұрышы берілген. A және B төбелері әдемі. Онда C төбесіде міндетті түрде әдемі болу керек па?

Областной этап
юниорской олимпиады по предметам
естественно-математического направления
(2021-2022 учебный год)

Предемет: математика

7 класс

Время работы: 3 часа.
Каждая задача оценивается в 7 баллов.

1. Аслан записал на доске количество всех чисел от 1 до 2022 включительно которые делится на 2 или 7. Алмаз записал на доске количество всех чисел от 1 до 2022 включительно которые делится на 3 или 5. У кого из них число больше?

2. Докажите неравенство для всех действительных чисел x и y:

$$x^2 + (1-y)^2 + (x-y)^2 \geqslant \frac{1}{3}.$$

3. В мешке лежат 2022 шарика. Арлан и Арман начинают поочереди брать из мешка любое количество шариков от 1 до 42 включительно. Начинает Арлан. Проигрывает тот кто возьмет последний шарик. Может ли Арман гарантировать себе победу?

4. В треугольнике вершина называется «красивой», если через нее можно провести прямую, делящую этот треугольник на два меньших треугольника, каждый из которых является равнобедренным. Дан треугольник ABC. Оказалось, что в нём вершины A и B являются красивыми. Обязательно ли вершина C является также красивой?

Решения и критерии оценивания районного этапа юниорской олимпиады по предметам естественно-математического направления

2021-2022 учебный год

7 класс

Общие положения по проверке работ

1. Приведённые критерии оценивания являются приблизительными. Учащиеся (как и проверяющие), возможно, смогут найти и другие верные решения. Жюри имеет право вносить изменения в критерии, проголосовав за них коллегиально. Главное, чтобы все работы участников оценивались по одинаковым критериям.

2. Перед проверкой жюри следует внимательно изучить олимпиадные задания, их решения и критерии. Желательно прорешать задания самим для возможного поиска альтернативных решений.

3. По окончании проверки обязательно надо проводить разбор и апелляцию задач, притом разборы желательно делать до апелляции и при разборе рассказывать ученикам, за что снимались баллы, а за что добавлялись. Это значительно сократить число учеников желающих подать на апелляцию.

4. В целях более справедливой оценки желательно чтобы одну задачу проверял один человек (или, согласованно, одна группа). В конце, если позволяет время, то следует перепроверить горизонтально (один человек проверяет все задачи одного школьника).

5. Следует помнить, что олимпиадная работа – это не контрольная работа. При оценивании олимпиадных работ, в отличие от оценивания типовых заданий по математике, недопустимо снимать баллы за исправления в работе, за слишком длинное решение, или если решение школьника отличается от решения, приведенного в учебных пособиях.

6. Не следует слишком строго наказывать за технические ошибки или недостатки в решении: описки, легко устранимые арифметические ошибки, непринципиальные моменты в ходе решения, напримеручастник до конца не упростил ответ, не совсем строгий порядок изложение или пропуск очевидных моментов, не влияющих в целом на ход решения. В зависимости от серьёзности ошибки или недостатка снимается не более 2 баллов, в некоторых ситуациях вообще снимать не следует.

7. Внимательно проверяйте насколько соответствует решение критериям проверки. В особенности, если решение ученика неполное и / или альтернативное официальному. Важно понять, насколько участник продвинулся по критериям, какие случае идеи он предлагает и какие факты им получены или доказаны. В альтернативного решения желательно обсудить решения и критерии для этого решения коллегиально.

8. Однако текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен оцениваться в 0 баллов. Баллы за «старание участника» не выставляются, даже если участник исписал много страниц или построил «красивый» чертёж. Если участник «угадал» правильный ответ, не приводит никаких объяснений, как он его получил, то за это не следует давать баллов.

9. Часто на олимпиадах можно встретить так называемые «счётные решения», когда участник пытается решить задачу «в лоб», опираясь только на алгебраические операции, метод координат, векторный метод, теоремы косинусов, синусов, Чевы, Менелая и т. п., не применяя никакую идею, отличного от технического счёта. Обычно такие решения (если вообще возможно решить таким способом задачу) занимают много страниц текста. К таким «счётным» решениям по сложившейся многолетней традицииприменяется следующая схема оценивания:

   - если участник смог довести своё счётное решение до конца, то он получает полные **7 баллов**;
   - если участник не довёл своё «счётное» решение до конца (независимо насколько он продвинулся) и / или допустил вычислительную ошибку — **0 баллов**.

10. На математических олимпиадах преимущественно закрепилась наилучшим образом зарекомендовавшая себя 7-балльная шкала. Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных участником. Основные принципы оценивания приведены в таблице ниже. Таблица примерная, к каждой задаче следует подходить индивидуально.

Примерные критерии оценивания задач

Баллы	Отметка	Правильность (ошибочность) решения
7	$+$	Полное верное решение.
6-7	$\underset{\cdot}{+}$	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	$\underset{\bullet}{+}$ или $\underset{-}{+}$	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	$\pm$	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	$\mp$	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	$\dot{-}$	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	$-$	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	$-$	Решение отсутствует.

Задача 7.1

Аслан записал на доске количество всех чисел от 1 до 2022 включительно которые делится на 2 или 7. Алмаз записал на доске количество всех чисел от 1 до 2022 включительно которые делится на 3 или 5. У кого из них число больше?

Ответ: у Алмаза число больше..

Решение. Чисел, которые делятся на 2 или на 7 будет

$$\left[\frac{2022}{2}\right]+\left[\frac{2022}{2}\right]-\left[\frac{2022}{14}\right]=1011+288-144=1155.$$

Чисел которые делится на на 3 или 5 будет

$$\left[\frac{2022}{3}\right]+\left[\frac{2022}{5}\right]-\left[\frac{2022}{15}\right]=674+404-134=1212.$$

Значит у Алмаза число больше.

Приметрые критерии оценивания

1. Полное решение **(7 баллов)**.
2. Посчитано количества чисел делящихся или на 2 или на 7 – 3 балла.
3. Посчитано количества чисел делящихся или на 3 или на 5 – 3 балла.

Задача 7.2

Докажите неравенство для всех действительных чисел x и y:

$$x^2 + (1-y)^2 + (x-y)^2 \geqslant \frac{1}{3}.$$

Решение. Раскроем скобки в левой части неравенства:

$$\begin{gathered} x^2 + (1-y)^2 + (x-y)^2 = \\ = x^2 + 1 - 2y + y^2 + x^2 - 2xy + y^2 = \\ = x^2 - 2xy + 2y^2 - 2y + 1. \end{gathered}$$

Таким образом, наше неравенство перепишется в виде

$$\begin{gathered} x^2 - 2xy + 2y^2 - 2y + 1 \geqslant \frac{1}{3} \iff \\ x^2 - 2xy + 2y^2 - 2y + \frac{2}{3} \geqslant 0. \end{gathered}$$

Умножим последнее неравенство на 12:

$$12x^2 - 12xy + 12y^2 - 12y + 4 \geqslant 0.$$

В левой части уравнения выделим полные квадраты

$$\begin{gathered} 12x^2 - 12xy + 12y^2 - 12y + 8 = \\ = (9y^2 - 12y^2 + 4) + (12x^2 - 12xy + 3y^2) = \\ = (3y-2)^2 + 3(4x^2 - 4xy + y^2)^2 = \\ = (3y-2)^2 + 3(2x-y)^2. \end{gathered}$$

Итак, исходное уравнение преобразуется к виду:

$$3(2x-y)^2 + (3y-2)^2 \geqslant 0.$$

Так как квадраты чисел неотрицательны, то последнее неравенство (а, значит, и исходное неравенство) верно при любых значениях x и y.

Примерные критерии оценивания

1. Правильно раскрыты скобки в левой части неравенства **(1 балл)**.
2. Выделен полный квадрат $(3y-2)^2$ **(1 балл)**.
3. Выделен полный квадрат $(2x-y)^2$ **(1 балл)**.

Примечание. *Баллы пунктов 1-3 суммируются.*

4. Неравенство приведено к виду, равносильному

$$3(2x-y)^2 + (3y-2)^2 \geqslant 0.$$

(6 баллов)

5. Окончание доказательства **(1 балл)**.

Примечание. *Баллы пунктов 4 и 5* ***суммируются****. Если участнику даются баллы согласно пунктам 4 или 5, то пункты 1- 3* ***не учитываются****.*

Задача 7.3

В мешке лежат 2022 шарика. Арлан и Арман начинают поочереди брать из мешка любое количество шариков от 1 до 42 включительно. Начинает Арлан. Проигрывает тот кто возьмет последний шарик. Может ли Арман гарантировать себе победу?

Ответ: нет..

Решение. Если Арлан своим ходом берет x шариков. Тогда Арман следующим своим ходом возьмет $43 - x$ шариков. То есть в сумме они возьмут 43 шарика. Значит Арлану придется взять последний шарик так как $2022 = 43 \cdot 47 + 1$.

Примерные критерии оценивания

1. Полное решение **(7 баллов)**.

Задача 7.4

В треугольнике вершина называется «красивой», если через нее можно провести прямую, делящую этот треугольник на два меньших треугольника, каждый из которых является равнобедренным. Дан треугольник ABC. Оказалось, что в нём вершины A и B являются красивыми. Обязательно ли вершина C является также красивой?

Ответ: не обязательно.

Решение. Приведем пример треугольника ABC, в котором вершины A и B являются «красивыми», а вершина C — нет.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC в котором $\angle A = 90°$, $\angle B = 67{,}5°$, $\angle C = 22{,}5°$.

Из вершины A можно провести медиану AM, тогда по свойству прямоугольного треугольника $AM = CM = BM$, то есть $\triangle ABM$ и $\triangle ACM$ равнобедренные.

На стороне AC можно отметить точку N такую, что $\angle NBC = 22{,}5° = \angle BCN$. Тогда $\angle ABN = \angle ANB = 45°$, то есть $\triangle ANB$ и $\triangle CNB$ равнобедренные.

Но тогда на стороне AB не найдется точки, скажем K, для которой $\triangle ACK$ и $\triangle BCK$ являются одновременно равнобедренными, так как $\angle CKB = \angle ACK + \angle CAB > 90°$, то есть $\triangle BCK$ является тупоугольным и неравнобедренным (в этом треугольнике из двух острых углов один меньше $22{,}5°$, другой больше).

Замечание. Существуют и другие примеры.

Примерные критерии оценивания

1. Приведён правильный пример треугольника и в этом примере показано, что вершины A и B являются «красивыми» **(3 балла))**.
2. Приведён правильный пример треугольника и в этом примере показано, что вершина C не является «красивой» **(4 балла))**.
3. Приведённый пример треугольника неправильный **(0 баллов)**.