8 класс. Решения

1. В остроугольном треугольнике ABC провели высоту AD. Известно, что $2CD = BD$. Пусть $K \neq A$ такая точка на описанной окружности треугольника ABC, что $AK \parallel BC$. Пусть S – середина AB. Докажите, что прямая SK перпендикулярна прямой BC.

Решение:Заметим, что $KACB$ – равнобокая трапеция. Пусть T – основание перпендикуляра из K на BC. Тогда в силу симметрии относительно серединного перпендикуляра к BC, получаем, что $BT = CD$. Так как $BD = BT + TD = 2CD$, то получаем, что $TD = CD = BD$. Значит, T – середина BD и как следствие ST – перпендикулярна BC. Но тогда K, S, T лежат на одной прямой, что завершает доказательство.

2. Арлан и Арман играют в игру. У них есть веревка длины 2022. Каждым ходом они берут кусочек веревки, и разрезают его на две ненулевые части. Побеждает тот, кто после своего хода сможет выбрать 4 кусочки веревки так, что их длины образуют арифметическую прогрессию.

Решение: Покажем, что у Арлана есть выигрышная стратегия. Пусть он первым ходом разрезал веревку на две равные части. Арман своим ходом не может выиграть, так как после его хода будет только три куска веревки. Пусть он разрерал одну из частей на кусочки длины $x, 1011 - x$, где $x \geq \frac{1011}{2}$. Тогда следующим ходом Арлан выбирает веревку длины 1011 и разрезает ее на части длины $\frac{1011+x}{3}, \frac{2022-x}{3}$.Остается заметить, что числа $x, \frac{1011+x}{3}, \frac{2022-x}{3}, 1011 - x$ образуют арифметическую прогрессию.

3. Пусть $A = 2 + 2\sqrt{44x^2 + 1}$,($x-$ целое). Оказалось, что A целое число. Докажите, что A квадрат целого числа.

Решение: Пусть $A = 2+2\sqrt{44x^2 + 1}$ целое, тогда $44x^2+1$ полный нечетный квадрат. Пусть $44x^2+1 = (2y + 1)^2 \Rightarrow$

$$44x^2 + 1 = 4y^2 + 4y + 1 \Rightarrow 11x^2 = y(y + 1).$$

В силу того, что НОД$(y, y + 1) = 1$ получим

1 случай $y = 11a^2, y + 1 = b^2$.

2 случай $y = a^2, y + 1 = 11b^2$.

Случай 2 невозможен так как $11b^2 = a^2 + 1 \equiv 1, 5, 6, 10 \pmod{11}$.

Случай 1 $A = 2 + 2\sqrt{44x^2 + 1} = 2 + 2(2y + 1) = 4(y + 1) = 4b^2 = (2b)^2$.

Осталось показать, что такие x существуют. Например число $x = 30$ подходит.

4. Существуют ли различные натуральные числа a, b, c, что число $a^{n+1} + b^{n+1} + c^{n+1}$ делится на $a^n + b^n + c^n$ для бесконечно многих натуральных n?

Ответ: нет, таких чисел не существует.

Решение: От противного, пусть есть такие a, b, c. Определим $s_n = \frac{a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1}}{a^n+b^n+c^n}$ для каждого натурального n. Заметим, что для любого натурального n выполнено

$$(a^{n+2} + b^{n+2} + c^{n+2})(a^n + b^n + c^n) \geq (a^{n+1} + b^{n+1} + c^{n+1})^2$$

из КБШ. Тогда $s_{n+1} \geq s_n$, причём равенство достигалось бы только при $a^2 = b^2 = c^2$, что не является правдой. Значит $s_{n+1} > s_n$ для любого натурального n. Но тогда если s_n – целое для бесконечно многих n, то s_n – неограниченна в силу строгого возрастания. Однако $s_n < a + b + c$, что противоречит неограниченности s_n.

8 класс. Схема оценивания

Задача 1.

Пункт 1. Доказано, что $BT = CD$ - 1 балл.

Пункт 2. Доказано, что $BT = CD = TD$ - 1 балл.

Пункт 3. Доказано, что $ST \perp BC$ - 1 балл.

Пункт 4. Незначительная ошибка в решениях - (-1) балл.

Пункт 5. Полное решение - 7 баллов.

Задача 2.

Пункт 1. Первый ход Арлана должен быть 1011, 1011 (и/или выигрышная стратегия) - 1 балл.

Пункт 2. Утверждается, что после того, как Арман разрежет один из кусков длины 1011 на куски длиной x и $1011 - x$, то Арлан может получить 4 куска, длины которых составляет арифметическую прогрессию - 1 балл.

Пункт 3. Доказательство утверждения из пункта 2 - 5 баллов.

Пункт 4. Правильный ответ без обоснования - 0 баллов.

Задача 3.

Пункт 1. Не показано, что существует хотя бы один такой x-(-1) балл.

Пункт 2. Получено $b(b+1) = 11x^2$или $(b-1)(b+1) = 44x^2$ где b нечетный -1 балл.

Пункт 3. Правильное решение с полным доказательством - 7 баллов.

Задача 4.

Пункт 1. Доказано, что частное s_n будет меньше чем некоторое число не зависящее от n - 1 балл.

Пункт 2. Доказано, что $s_n -$ строго возрастает - 3 балла.

Пункт 3. Правильное решение с полным доказательством - 7 баллов.