Задачи

Задача №1. Пусть a, b, c — положительные действительные числа, такие что
$$a^2+b^2+c^2=\frac{1}{4}.$$
Докажите, что
$$\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\leq\frac{\sqrt{2}}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Задача №2. Пусть ABC — треугольник, такой что $AB < AC$. Пусть вписанная окружность, противоположная вершине A, касается сторон AB, AC и BC в точках D, E и F соответственно, и пусть J — её центр. Пусть P — точка на стороне BC. Окружности, описанные около треугольников BDP и CEP, пересекаются второй раз в точке Q. Пусть R — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую FJ. Докажите, что точки P, Q и R коллинеарны. (Вневписанная окружность треугольника ABC, противоположная вершине A, — это окружность, которая касается отрезка BC, луча AB за точкой B и луча AC за точкой C.)

Задача №3. Найдите все тройки положительных целых чисел (x, y, z), которые удовлетворяют уравнению
$$2020^x+2^y=2024^z.$$

Задача №4. Три друга, Арчи, Билли и Чарли, играют в игру. В начале игры у каждого из них есть кучка в 2024 камешка. Арчи делает первый ход, Билли — второй, Чарли — третий, и они продолжают делать ходы в том же порядке. На каждом ходе игрок, делающий ход, должен выбрать положительное целое число n, больше любого ранее выбранного числа любым игроком, взять $2n$ камешков из своей кучки и равномерно распределить их между двумя другими игроками. Если игрок не может сделать ход, игра заканчивается, и этот игрок проигрывает. Определите всех игроков, у которых есть стратегия, позволяющая, независимо от действий двух других игроков, не проиграть игру.