Задачи

Задача №1. Найдите все пары положительных целых чисел (a, b) таких, что

$$a! + b \cdot b! + a$$

являются степенями числа 5.

Задача №2. Для всех положительных действительных чисел x, y, z, докажите неравенство

$$\frac{2x^2 - x + y + z}{x + y^2 + z^2} + \frac{2y^2 + x - y + z}{x^2 + y + z^2} + \frac{2z^2 + x + y - z}{x^2 + y^2 + z} \geq 3.$$

Определите все тройки (x, y, z), для которых выполняется равенство.

Задача №3. Алиса и Боб играют в следующую игру на клетчатой доске 100×100. Ходят по очереди, игру начинает Алиса. Изначально доска пуста. На каждом ходу игроку разрешается выбрать любое целое число от 1 до 100^2, которое еще не записано ни в одной из клеток, и записать это число в любую пустую клетку. После того, когда не останется пустых клеток на доске, Алиса вычисляет сумму чисел в каждой строке, и наибольшая из этих 100 сумм — это её счёт. Боб вычисляет сумму чисел в каждом столбце, и наибольшая из этих 100 сумм — это его счёт. Алиса выигрывает, если её счёт больше, чем счёт Боба. Боб выигрывает, если его счёт больше, чем счёт Алисы. В противном случае никто не выигрывает. Определите, есть ли у одного из игроков выигрышная стратегия, и если да, то у кого.

Задача №4. AD и точка O — соответственно высота и центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Точка M — середина отрезка OD. Точки O_b и O_c являются центрами окружностей, описанных около треугольников AOC и AOB соответственно. Известно, что $AO = AD$. Докажите, что точки A, O_b, M и O_c лежат на одной окружности.