вторник, 16. июля 2024

Задача 1. Найдите все действительные числа α такие, что для любого положительного целого n целое число

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

кратно n. (Здесь $\lfloor z \rfloor$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее z. Например, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ и $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2{,}9 \rfloor = 2$.)

Задача 2. Найдите все пары (a, b) положительных целых чисел, для которых существуют такие положительные целые g и N, что

$$\text{НОД}(a^n + b,\, b^n + a) = g$$

для всех целых чисел $n \geqslant N$. (Здесь $\text{НОД}(x, y)$ обозначает наибольший общий делитель целых чисел x и y.)

Задача 3. Даны бесконечная последовательность положительных целых чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ и положительное целое число N. Известно, что для любого $n > N$ число a_n равно количеству раз, которое число a_{n-1} встречается среди $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Докажите, что хотя бы одна из последовательностей $a_1, a_3, a_5, \ldots$ и $a_2, a_4, a_6, \ldots$ является в конечном итоге периодической. (Последовательность $b_1, b_2, b_3, \ldots$ называется *в конечном итоге периодической*, если существуют такие положительные целые числа p и M, что $b_{m+p} = b_m$ для всех $m \geqslant M$.)

Время на работу: 4 часа 30 минут.
Каждая задача оценивается в 7 баллов.

среда, 17. июля 2024

Задача 4. Пусть ABC – треугольник, в котором $AB < AC < BC$. Пусть ω – вписанная в треугольник ABC окружность, а I – ее центр. Пусть X – такая точка на прямой BC, отличная от C, что прямая, проходящая через X параллельно AC, касается ω. Аналогично, пусть Y – такая точка на прямой BC, отличная от B, что прямая, проходящая через Y параллельно AB, касается ω. Пусть AI пересекает описанную около треугольника ABC окружность второй раз в точке $P \neq A$. Пусть K и L – середины сторон AC и AB соответственно. Докажите, что $\angle KIL + \angle YPX = 180°$.

Задача 5. Улитка Турбо играет на доске, имеющей 2024 ряда и 2023 столбца, в следующую игру. В 2022 клетках доски прячутся монстры. Изначально Турбо не знает, где находится какой-либо из монстров, но она знает, что в каждом ряду, кроме первого и последнего, есть ровно один монстр и что в каждом столбце находится не более одного монстра.

Турбо делает серию попыток, чтобы пройти из первого ряда в последний. При каждой попытке она может выбрать в качестве начальной любую клетку в первом ряду, а затем совершает серию перемещений из клетки в соседнюю клетку, имеющую общую сторону. (Ей разрешается возвращаться в ранее посещенные клетки.) Если она посещает клетку с монстром, то её попытка завершается, и она переносится обратно в первый ряд, чтобы начать новую попытку. Монстры не двигаются, а Турбо запоминает, есть ли в каждой посещенной ею клетке монстр. Если она достигнет любой клетки в последнем ряду, её попытка завершается и игра оканчивается.

Определите минимальное значение n такое, что у Турбо есть стратегия, которая, независимо от местонахождений монстров, гарантирует достижение последней строки за n попыток или раньше.

Задача 6. Пусть $\mathbb{Q}$ – множество всех рациональных чисел. Функция $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ называется *смежной*, если выполнено следующее условие: для любых $x, y \in \mathbb{Q}$ имеем

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \qquad \text{или} \qquad f(f(x) + y) = x + f(y).$$

Докажите, что существует целое число c такое, что для любой смежной функции f имеется не более c различных рациональных чисел вида $f(r) + f(-r)$ для какого-то рационального r, и найдите наименьшее возможное значение c.