суббота, 8. июля 2023

Задача 1. Найдите все составные натуральные числа $n > 1$ со следующим свойством: если через $d_1, d_2, \dots, d_k$ обозначить все натуральные делители числа n, причем $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$, то d_i делит $d_{i+1} + d_{i+2}$ для всех $1 \leqslant i \leqslant k-2$.

Задача 2. Дан остроугольный треугольник ABC, причем $AB < AC$. Окружность Ω описана около треугольника ABC. Середину ее дуги CB, содержащей точку A, обозначим через S. Прямая, проходящая через A и перпендикулярная стороне BC, пересекает отрезок BS в точке D и пересекает Ω второй раз в точке $E \neq A$. Прямая, проходящая через D и параллельная стороне BC, пересекает прямую BE в точке L. Окружность, описанную около треугольника BDL, обозначим через ω. Пусть $P \neq B$ – вторая точка пересечения ω с Ω.
Докажите, что касательная к окружности ω в точке P пересекает прямую BS в точке, лежащей на биссектрисе угла $\angle BAC$.

Задача 3. Дано натуральное число $k \geqslant 2$. Найдите все бесконечные последовательности положительных целых чисел a_1, a_2, $\ldots$ со следующим свойством: существует многочлен P вида

$$P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

с неотрицательными целыми коэффициентами $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ такой, что

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}$$

для всех натуральных $n \geq 1$.

Время на работу: 4 часа 30 минут.
Каждая задача оценивается в 7 баллов.

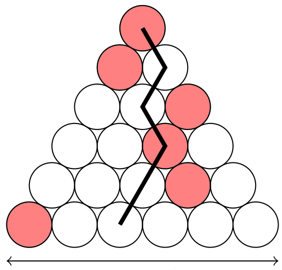
воскресенье, 9. июля 2023

Задача 4. Даны попарно различные положительные действительные числа x_1, x_2, ..., x_{2023} такие, что число

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

является целым для всех $n = 1, 2, \ldots, 2023$. Докажите, что $a_{2023} \geqslant 3034$.

Задача 5. Пусть $n \geq 1$ натуральное число. *Японский треугольник* состоит из $1+2+\cdots+n$ одинаковых кругов, выложенных в форме равностороннего треугольника так, что для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ ряд с номером i состоит ровно из i кругов, в точности один из которых покрашен в красный цвет. *Путем ниндзя* в японском треугольнике называется последовательность из n кругов, построенная следующим образом: начинаем с круга в ряде 1 и затем поочередно спускаемся вниз, переходя от круга к одному из двух кругов непосредственно под ним, пока не дойдем до ряда n. Ниже приведен пример японского треугольника для $n = 6$, а также пути ниндзя, содержащего два красных круга.



$n = 6$

Найдите наибольшее число k (зависящее от n) такое, что в любом японском треугольнике существует путь ниндзя, содержащий хотя бы k красных кругов.

Задача 6. Дан равносторонний треугольник ABC. Внутри ABC выбраны точки A_1, B_1, C_1 такие, что $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1B$ и

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ.$$

Прямые BC_1 и CB_1 пересекаются в точке A_2, прямые CA_1 и AC_1 пересекаются в точке B_2, прямые AB_1 и BA_1 пересекаются в точке C_2.
Предположим, что у треугольника $A_1B_1C_1$ стороны имеют попарно различные длины. Докажите, что тогда все три окружности, описанные около треугольников AA_1A_2, BB_1B_2 и CC_1C_2, проходят через какие-то две общие точки.

Время на работу: 4 часа 30 минут.
Каждая задача оценивается в 7 баллов.