понедельник, 11. июля 2022

Задача 1. Банк Осло выпускает монеты двух видов: алюминиевые (обозначим их буквой A) и бронзовые (обозначим их буквой B). Мария выложила в ряд в некотором порядке n алюминиевых и n бронзовых монет. *Цепью* назовём любую последовательность подряд идущих монет одного вида. Для заданного целого положительного числа $k \leqslant 2n$ Мария последовательно повторяет следующую операцию: она выбирает цепь наибольшей длины, содержащую k-ую слева монету, и перемещает все монеты этой цепочки в левый край ряда. Например, если $n = 4$ и $k = 4$, то для начального ряда $AABBBABA$, процесс будет иметь вид:

$$AAB\underline{B}BABA \to BBB\underline{A}AABA \to AAA\underline{B}BBBA \to BBB\underline{B}AAAA \to BBB\underline{B}AAAA \to \cdots .$$

Найдите все пары (n, k), где $1 \leqslant k \leqslant 2n$, такие, что для любого начального ряда найдётся момент времени такой, что n левых монет ряда будут одного вида.

Задача 2. Через $\mathbb{R}^+$ обозначим множество всех положительных вещественных чисел. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такие, что для каждого $x \in \mathbb{R}^+$ существует ровно одно число $y \in \mathbb{R}^+$, удовлетворяющее неравенству

$$xf(y) + yf(x) \leqslant 2.$$

Задача 3. Пусть k — целое положительное число, а S — конечное множество, состоящее из нечётных простых чисел. Докажите, что существует не более одного способа (с точностью до поворотов и отражений) расположить все элементы множества S по кругу так, чтобы произведение любых двух соседних чисел имело вид $x^2 + x + k$, где x — целое положительное число.

Language: Russian

Время на работу: 4 часа 30 минут.
Каждая задача оценивается в 7 баллов.

вторник, 12. июля 2022

Задача 4. Пусть $ABCDE$ — выпуклый пятиугольник, в котором $BC = DE$. Внутри пятиугольника $ABCDE$ нашлась точка T такая, что $TB = TD$, $TC = TE$ и $\angle ABT = \angle TEA$. Прямая AB пересекает прямые CD и CT в точках P и Q соответственно. Предположим, что точки P, B, A, Q расположены на прямой в указанном порядке. Прямая AE пересекает прямые CD и DT в точках R и S соответсвенно. Предположим, что точки R, E, A, S расположены на прямой в указанном порядке. Докажите, что точки P, Q, R, S лежат на одной окружности.

Задача 5. Найдите все тройки (a, b, p) целых положительных чисел, такие что число p простое и

$$a^p = b! + p.$$

Задача 6. Пусть n — целое положительное число. *Нордическим* квадратом будем называть любую таблицу $n \times n$, клетки которой заполнены числами от 1 до n^2 так, что каждое число использовано по одному разу и в каждой клетке записано ровно одно число. Две клетки назовём соседними, если у них есть общая сторона. *Долиной* назовём любую клетку, такую что во всех соседних с ней клетках записаны числа, большие чем в ней. Подъёмом назовём последовательность, состоящую из не менее чем одной клетки, такую что

1. первая клетка в последовательности — долина;
2. каждая следующая клетка последовательности является соседней с предыдущей;
3. числа, записанные в клетках последовательности, расположены в порядке возрастания.

Для каждого заданного n найдите наименьшее возможное количество всех подъёмов в нордическом квадрате.

Время на работу: 4 часа 30 минут.
Каждая задача оценивается в 7 баллов.