понедельник, 19 июля 2021

Задача 1. Дано целое число $n \geqslant 100$. Ваня написал числа $n, n+1, \ldots, 2n$ на $n+1$ карточке, каждое по одному разу. Затем он перемешал колоду из этих карточек и разделил её на две стопки. Докажите, что хотя бы одна из двух стопок содержит две карточки, сумма чисел на которых — точный квадрат.

Задача 2. Докажите, что для любых вещественных чисел $x_1, \ldots, x_n$ выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i - x_j|} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i + x_j|}.$$

Задача 3. Точка D внутри остроугольного треугольника ABC, в котором $AB > AC$, такова, что $\angle DAB = \angle CAD$. Точка E на отрезке AC такова, что $\angle ADE = \angle BCD$; точка F на отрезке AB такова, что $\angle FDA = \angle DBC$; точка X на прямой AC такова, что $CX = BX$. Точки O_1 и O_2 — центры описанных окружностей треугольников ADC и EXD соответственно. Докажите, что прямые BC, EF и O_1O_2 пересекаются в одной точке.

Время на работу: 4 часа 30 минут.
Каждая задача оценивается в 7 баллов.

вторник, 20 июля 2021

Задача 4. Дана окружность Γ с центром I. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ таков, что каждый из отрезков AB, BC, CD и DA касается Γ. Пусть Ω — описанная окружность треугольника AIC. Продолжение отрезка BA за точку A пересекает Ω в точке X, продолжение отрезка BC за точку C пересекает Ω в точке Z. Продолжения отрезков AD и CD за точку D пересекают Ω в точках Y и T соответственно. Докажите, что

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC.$$

Задача 5. Чип и Дейл собрали на зиму 2021 орешек. Чип пронумеровал орешки числами от 1 до 2021 и вырыл 2021 маленькую ямку вокруг их любимого дерева. На следующее утро он обнаружил, что Дейл положил в каждую ямку по орешку, ничуть не беспокоясь о порядке. Расстроившись, Чип решил переупорядочить орешки посредством следующей последовательности из 2021 действия: во время k-го действия он меняет местами орешки, соседние с орешком под номером k. Докажите, что найдётся такое число k, что во время k-го действия поменялись местами орешки с номерами a и b такими, что $a < k < b$.

Задача 6. Дано целое число $m \geqslant 2$. В конечном множестве A, состоящем из (не обязательно положительных) целых чисел, нашлись такие подмножества $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_m$, что при каждом $k = 1, 2, \ldots, m$ сумма элементов множества B_k равна m^k. Докажите, что A содержит хотя бы $m/2$ элементов.

Время на работу: 4 часа 30 минут.
Каждая задача оценивается в 7 баллов.