Language: **Russian**

Day: **1**

*Суббота, 15 апреля 2023 г.*

**Задача 1.** Даны $n \geqslant 3$ действительных положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$ пусть $b_i = \frac{a_{i-1}+a_{i+1}}{a_i}$ (здесь мы определяем $a_0$ как $a_n$, а также $a_{n+1}$ как $a_1$). Для всех $i$ и $j$ от 1 до $n$ включительно оказалось, что $a_i \leqslant a_j$ тогда и только тогда, когда $b_i \leqslant b_j$.

Докажите, что $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

**Задача 2.** Дан остроугольный треугольник $ABC$. Пусть $D$ – точка на его описанной окружности такая, что $AD$ – её диаметр. Точки $K$ и $L$ лежат на отрезках $AB$ и $AC$ соответственно так, что $DK$ и $DL$ – касательные к окружности, описанной около треугольника $AKL$.

Докажите, что прямая $KL$ проходит через ортоцентр треугольника $ABC$.

*Ортоцентром треугольника называется точка пересечения его высот.*

**Задача 3.** Пусть $k$ – целое положительное число. У Лекси есть словарь $\mathcal{D}$, состоящий из нескольких $k$-буквенных слов, содержащих только буквы $A$ и $B$. В каждую клетку таблицы $k \times k$ Лекси хочет вписать либо букву $A$, либо букву $B$ так, чтобы каждый столбец таблицы содержал слово из $\mathcal{D}$ при чтении сверху вниз, и каждая строка таблицы содержала слово из $\mathcal{D}$ при чтении слева направо.

Чему равно наименьшее целое число $m$ такое, что если $\mathcal{D}$ содержит не менее $m$ различных слов, то Лекси заведомо сможет заполнить таблицу нужным образом, независимо от того, какие слова находятся в $\mathcal{D}$?

Language: Russian

Время работы: 4 часа 30 минут
Каждая задача оценивается в 7 баллов

**Условия задач запрещено разглашать до 00:00 ночи 17 апреля 2023 г.**