EGMO Hungary 2022 Eger
European Girls' Mathematical Olympiad

Language: **Kazakh**

Day: **1**

Пятница, 8 апреля, 2022

Задание 1. Дан остроугольный треугольник ABC, в котором $BC < AB$ и $BC < CA$. Точка P лежит на отрезке AB, а точка Q на отрезке AC так, что $P \neq B$ и $Q \neq C$ и $BQ = BC = CP$. Точка T - центр описанной окружности треугольника APQ, точка H - ортоцентр треугольника ABC, а S-точка пересечения BQ и CP. Докажите, что точки T, H и S лежат на одной прямой.

Задание 2. Обозначим через $\mathbb{N} = \{1,2,3, \dots\}$ множество всех натуральных чисел. Найдите все функции $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ такие, что для любых натуральных чисел a и b выполняются два условия:

(1) $f(ab) = f(a)f(b)$ и

(2) хотя бы, два из чисел $f(a)$, $f(b)$ и $f(a+b)$ равны.

Задание 3. Назовём бесконечную последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, \dots$ *хорошей*, если выполнены следующие два условия:

(1) a_1 – полный квадрат, и
(2) для любого натурального числа $n \geq 2$, число a_n – наименьшее натуральное число такое, что
$na_1 + (n-1)a_2 + \cdots + 2a_{n-1} + a_n$
является полным квадратом.

Докажите, что для любой хорошей последовтельности $a_1, a_2, a_3, \dots$, существует натуральное число k такое, что $a_n = a_k$ для всех целых $n \geq k$.

Время работы: 4 часа 30 минут
Каждая задача оценивается в 7 баллов.

Чтобы олимпиада была честной и доставила всем удовольствие, пожалуйста, не упоминайте и не пишите ничего про задачи в интернете и любых социальных сетях до 04:00 ночи 10 апреля по времени Алматы.