Понедельник, 12 апреля 2021 г.

Задача 4. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, а D — произвольная точка на стороне BC. Прямая, проходящая через D перпендикулярно BI, пересекает прямую CI в точке E, а прямая, проходящая через D перпендикулярно CI, пересекает прямую BI в точке F. Докажите, что точка, симметричная точке A относительно прямой EF, лежит на прямой BC.

Задача 5. На плоскости отмечена точка O, называемая началом. Пусть P — множество, состоящее из 2021 точки на плоскости такое, что

(i) никакие три точки P не лежат на одной прямой, и

(ii) никакие две точки P не лежат на прямой, проходящей через начало.

Треугольник с вершинами из P называется *толстым*, если O лежит строго внутри этого треугольника. Найдите максимально возможное число толстых треугольников.

Задача 6. Существует ли неотрицательное целое число a, для которого уравнение

$$\left\lfloor \frac{m}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{m}{m} \right\rfloor = n^2 + a$$

имеет более одного миллиона различных решений (m, n), где m и n — положительные целые числа?

Как обычно, $\lfloor x \rfloor$ *обозначает целую часть числа* x*. Например,* $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$, $\lfloor \pi \rfloor = \lfloor 22/7 \rfloor = 3$, $\lfloor 42 \rfloor = 42$ *и* $\lfloor 0 \rfloor = 0$.

Время работы: 4 часа 30 минут
Каждая задача оценивается из 7 баллов

Чтобы олимпиада была честной и доставила всем удовольствие, пожалуйста, не упоминайте и не пишите ничего про задачи в интернете и любых социальных сетях до 15:00 13 апреля по московскому времени.