16 апреля 2020

Задача 1. Целые положительные числа a_0, a_1, a_2, …, a_{3030} таковы, что

$$2a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n \quad \text{при всех } n = 0, 1, 2, \dots, 3028.$$

Докажите, что хотя бы одно из чисел a_0, a_1, a_2, …, a_{3030} делится на 2^{2020}.

Задача 2. Найдите все наборы $(x_1, x_2, \dots, x_{2020})$ неотрицательных вещественных чисел таких, что выполняются следующие три условия:

(i) $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{2020}$;

(ii) $x_{2020} \leqslant x_1 + 1$;

(iii) существует перестановка $(y_1, y_2, \dots, y_{2020})$ набора $(x_1, x_2, \dots, x_{2020})$ такая, что

$$\sum_{i=1}^{2020} \big((x_i + 1)(y_i + 1)\big)^2 = 8 \sum_{i=1}^{2020} x_i^3.$$

Перестановкой набора называется набор такой же длины, что и исходный, с теми же элементами, но элементы в нём могут быть расположены в ином порядке.
Например, $(2, 1, 2)$ *является перестановкой* $(1, 2, 2)$*, и они оба являются перестановками набора* $(2, 2, 1)$*. Отметим, что любой набор является своей перестановкой.*

Задача 3. Пусть $ABCDEF$ — выпуклый шестиугольник такой, что $\angle A = \angle C = \angle E$ и $\angle B = \angle D = \angle F$ и биссектрисы внутренних углов $\angle A$, $\angle C$ и $\angle E$ пересекаются в одной точке.

Докажите, что биссектрисы внутренних углов $\angle B$, $\angle D$ и $\angle F$ тоже пересекаются в одной точке.

Обратим внимание, что внутренний угол $\angle A = \angle FAB$*. Другие внутренние углы шестиугольника определяются аналогично.*

Language: Русский

Время работы: 4 часа 30 минут
Каждая задача оценивается из 7 баллов

Чтобы олимпиада была честной и доставила всем удовольствие, пожалуйста, не упоминайте и не пишите ничего про задачи в интернете и любых социальных сетях до 01:00 ночи 19 апреля по московскому времени.