



EGMO 2018
Florence | April 9th-15th

Language: Russian

Day: 1

Среда, 11 апреля 2018 г.

Задача 1. Дан треугольник ABC , в котором $CA = CB$ и $\angle ACB = 120^\circ$; а точка M — середина стороны AB . Пусть P — произвольная точка, лежащая на описанной окружности треугольника ABC , а Q — точка на отрезке CP такая, что $QP = 2QC$. Прямая, проходящая через точку P перпендикулярно AB , пересекает прямую MQ в точке N .

Докажите, что существует некоторая окружность такая, что точка N лежит на этой окружности вне зависимости от выбора точки P .

Задача 2. Рассмотрим множество

$$A = \left\{ 1 + \frac{1}{k} : k = 1, 2, 3, \dots \right\}.$$

- (a) Докажите, что любое целое число $x \geq 2$ может быть получено как произведение одного или нескольких не обязательно различных элементов множества A .
- (b) Для каждого целого числа $x \geq 2$ через $f(x)$ обозначим наименьшее целое число такое, что x может быть получено как произведение $f(x)$ не обязательно различных элементов множества A .

Докажите, что существует бесконечно много пар (x, y) целых чисел $x \geq 2$ и $y \geq 2$ таких, что

$$f(xy) < f(x) + f(y).$$

(Пары (x_1, y_1) и (x_2, y_2) считаются различными, если $x_1 \neq x_2$ или $y_1 \neq y_2$).

Задача 3. Каждой из n участниц EGMO присвоен один из номеров C_1, \dots, C_n . После олимпиады они выстраиваются в очередь перед рестораном согласно следующим правилам:

- Жюри выбирает начальную расстановку участниц в очереди.
- Каждую минуту Жюри выбирает некоторое число i из промежутка $1 \leq i \leq n$.
 - Если перед участницей C_i стоят по крайней мере i других участниц, она платит Жюри один евро и перемещается в очереди вперёд ровно на i позиций.
 - Если перед участницей C_i стоит менее, чем i других участниц, ресторан открывается и процесс заканчивается.

- (a) Докажите, что этот процесс не может продолжаться бесконечно долго вне зависимости от действий Жюри.
- (b) Для каждого n найдите наибольшее количество евро, которое Жюри может получить, выбрав начальную расстановку участниц и последовательность ходов.

Language: Russian

Время работы: 4 часа 30 минут
Каждая задача оценивается в 7 баллов