Воскресенье, 9 апреля 2017 г.

Задача 4. Пусть $n \geq 1$ — целое число и $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ — положительные целые числа. В группе из t_n+1 человек некоторые сыграли между собой в шахматы. Два человека могли сыграть между собой не более одной партии. Докажите, что могло оказаться так, что одновременно будут выполняться два условия:

(i) Количество игр, сыгранных каждым человеком — одно из чисел $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

(ii) Для каждого i, такого, что $1 \leq i \leq n$, найдётся человек, который сыграл ровно t_i партий.

Задача 5. Пусть $n \geq 2$ — целое число. Упорядоченный набор $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ не обязательно различных положительных целых чисел назовём *дорогой n-кой*, если существует положительное целое число k такое, что

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \cdot \ldots \cdot (a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1) = 2^{2k-1}.$$

a) Найдите все целые числа $n \geq 2$, для которых существует *дорогая n-ка*.

b) Докажите, что для каждого нечётного положительного целого числа m существует целое число $n \geq 2$ такое, что число m встречается в какой-то *дорогой n-ке*.

В левой части равенства содержится ровно n сомножителей.

Задача 6. Пусть ABC — остроугольный треугольник, в котором все стороны различны. Обозначим точки, симметричные центроиду G и центру O описанной окружности треугольника ABC относительно его сторон BC, CA, AB через G_1, G_2, G_3 и O_1, O_2, O_3, соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников G_1G_2C, G_1G_3B, G_2G_3A, O_1O_2C, O_1O_3B, O_2O_3A и ABC пересекаются в одной точке.
Центроидом треугольника называется точка пересечения его медиан.

Время работы: 4 часа 30 минут
Каждая задача оценивается в 7 баллов