Суббота, 8 апреля 2017 г.

Задача 1. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle DAB = \angle BCD = 90^\circ$ и $\angle ABC > \angle CDA$. Пусть Q и R — точки пересечения некоторой прямой с отрезками BC и CD, соответственно, а P и S — точки пересечения этой прямой с прямыми AB и AD, соответственно. Известно, что $PQ = RS$. Обозначим середину отрезка BD через M, а середину отрезка QR через N. Докажите, что точки M, N, A и C лежат на одной окружности.

Задача 2. Найдите наименьшее положительное целое число k, для которого существуют: раскраска положительных целых чисел $\mathbb{Z}_{>0}$ в k цветов и функция $f\colon \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$, удовлетворяющая следующим двум условиям:

(i) Для всех положительных целых чисел m, n одинакового цвета $f(m+n) = f(m) + f(n)$.

(ii) Найдутся положительные целые числа m, n такие, что $f(m+n) \neq f(m) + f(n)$.

В раскраске $\mathbb{Z}_{>0}$ в k цветов каждое целое число окрашено ровно в один из k цветов. В условиях (i) и (ii) положительные целые числа m, n не обязательно различны.

Задача 3. На плоскости даны 2017 прямых, никакие три из которых не проходят через одну точку. Улитка Турбо сидит в некоторой точке ровно на одной из прямых и начинает ползти по прямым, следуя правилам: она движется по прямой до тех пор, пока не доползёт до точки пересечения прямых. В точке пересечения она продолжает движение по другой прямой, поворачивая поочерёдно направо или налево, меняя выбор направления поворота в следующей точке пересечения прямых. Она может менять направление движения только в точках пересечения прямых. Могло ли оказаться, что по некоторому отрезку она ползла в обоих направлениях во время своего путешествия?

Время работы: 4 часа 30 минут

Каждая задача оценивается в 7 баллов