Задача №1. Пусть ABC — остроугольный треугольник с $AC > AB$ и пусть D — основание биссектрисы угла A, опущенной на BC. Отражения прямых AB и AC относительно прямой BC пересекают AC и AB в точках E и F соответственно. Прямая, проходящая через D, пересекает AC и AB в точках G и H соответственно так, что G находится строго между A и C, а H — строго между B и F. Докажите, что описанные окружности треугольников EDG и FDH касаются друг друга.

Задача №2. Пусть $n \geq k \geq 3$ — целые числа. Покажите, что для любой целочисленной последовательности

$$1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leq n$$

можно выбрать неотрицательные целые числа $b_1, b_2, \ldots, b_k$, удовлетворяющие следующим условиям:

(i) $0 \leq b_i \leq n$ для каждого $1 \leq i \leq k$,

(ii) все положительные b_i различны,

(iii) суммы $a_i + b_i$ для $1 \leq i \leq k$ образуют перестановку первых k членов непостоянной арифметической прогрессии.

Задача №3. Пусть a и b — различные положительные целые числа такие, что $3^a + 2$ делится на $3^b + 2$. Докажите, что $a > b^2$.

Задача №4. Пусть $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ — множество всех положительных вещественных чисел. Найдите все функции $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ и многочлены $P(x)$ с неотрицательными вещественными коэффициентами такие, что $P(0) = 0$ и удовлетворяют равенству

$$f(f(x) + P(y)) = f(x - y) + 2y$$

для всех вещественных чисел $x > y > 0$.