

Задача №1. Найдите все функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, которые удовлетворяют равенству

$$xf(x + f(y)) = (y - x)f(f(x))$$

для любых $x, y \in \mathbb{R}$.

Задача №2. В треугольнике ABC вписанная окружность касается сторон BC , CA , AB в точках D , E , F соответственно. Предположим, что существует точка X на прямой EF такая, что

$$\angle XBC = \angle XCB = 45^\circ.$$

Пусть точка M является серединой дуги BC на описанной окружности около ABC , не содержащей точку A . Докажите, что прямая MD проходит через точку E или F .

Задача №3. Для каждого положительного целого числа n , обозначим через $\omega(n)$ количество различных простых делителей n (например, $\omega(1) = 0$ и $\omega(12) = 2$). Найдите все многочлены $P(x)$ с целочисленными коэффициентами такие, что если n является положительным целым числом, удовлетворяющим неравенству

$$\omega(n) > 2023^{2023},$$

то $P(n)$ также является положительным целым числом и верно неравенство

$$\omega(n) \geq \omega(P(n)).$$

Задача №4. Найдите наибольшее целое число $k \leq 2023$, для которого верно следующее свойство: как бы Алиса не раскрасила ровно k чисел из множества $\{1, 2, \dots, 2023\}$ в красный цвет, Боб сможет покрасить в синий цвет некоторые из оставшихся, непокрашенных чисел таким образом, что сумма всех чисел, покрашенных в красный цвет, окажется равной сумме всех чисел, покрашенных в синий цвет.