Задача №1

Дан остроугольный треугольник ABC. На отрезках AB и AC отмечены точки D и E соответственно так, что $BC \parallel DE$. Пусть X — внутренняя точка четырёхугольника $BCED$. Предположим, что лучи DX и EX пересекают сторону BC в точках P и Q соответственно, причём P и Q лежат между B и C. Пусть описанные окружности треугольников BQP и CPX во второй раз пересекаются в точке Y. Докажите, что точки A, X и Y лежат на одной прямой.

Задача №2

Рассмотрим клетчатую таблицу 100×100 и определим клетку упорядоченной парой (a, b), если она находится на пересечении строки с номером a и столбца с номером b, здесь $1 \leq a, b \leq 100$ — натуральные числа. Пусть k — целое число такое, что $51 \leq k \leq 99$. Конём k-го порядка назовём фигуру, которая ходит на одну клетку вертикально или горизонтально, а затем на k клеток в другом направлении; то есть, она ходит из клетки (a, b) в (c, d) так, что

$$(|a-c|, |b-d|) = (1, k) \quad \text{либо} \quad (|a-c|, |b-d|) = (k, 1).$$

Конь k-го порядка начинает движение из клетки $(1, 1)$ и совершает несколько ходов. Последовательность ходов — это последовательность клеток $(x_0, y_0) = (1, 1), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ таких, что для всех $i = 1, 2, \ldots, n$, конь k-го порядка может перейти из (x_{i-1}, y_{i-1}) в (x_i, y_i). В этом случае каждая клетка (x_i, y_i) называется достижимой. Найдите количество $L(k)$ достижимых клеток.

Задача №3

Пусть n — натуральное число, а $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — положительные вещественные числа. Докажите неравенство:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} \frac{\left(\frac{2}{1+a_i}\right)^{2i}}{1+a_i} \geq \frac{2}{1 + a_1 a_2 \cdots a_n} - \frac{1}{2^n}.$$

Задача №4

Докажите, что для каждого натурального числа t существует единственная перестановка $a_0, a_1, \ldots, a_{t-1}$ чисел $0, 1, \ldots, t-1$ такая, что для каждого $0 \le i \le t-1$ выполнено:

$$2a_i \neq t + i$$

и биномиальный коэффициент

$$C_{t+2a_i}^{t+i}$$

является нечётным числом.

Задача №5

Прямая ℓ пересекает стороны BC и AD вписанного четырёхугольника $ABCD$, в его внутренних точках R и S соответственно, а также пересекает луч DC (за точку C) в точке Q, а луч BA (за точку A) — в точке P. Описанные окружности треугольников QCR и QDS пересекаются в точке $N \neq Q$, а описанные окружности треугольников PAS и PBR пересекаются в точке $M \neq P$. Пусть прямые MP и NQ пересекаются в точке X, прямые AB и CD — в точке K, а прямые BC и AD — в точке L. Докажите, что точка X лежит на прямой KL.