Задача №1. Пусть $n \geq 5$ — натуральное число. Рассмотрим n квадратов с длинами сторон $1, 2, \ldots, n$, соответственно. Квадраты располагаются на плоскости со сторонами, параллельными осям координат x и y, так, чтобы никакие два квадрата не имели общих точек, за исключением, возможно, вершин. Докажите, что можно расположить эти квадраты таким образом, чтобы каждый квадрат имел общую точку ровно с двумя другими квадратами.

Задача №2. Найдите все натуральные числа $n \geq 2$ такие, что

$$\frac{\sigma(n)}{p(n)-1} = n.$$

Здесь через $\sigma(n)$ обозначена сумма всех натуральных делителей числа n, а через $p(n)$ — наибольший простой делитель числа n.

Задача №3. В параллелограмме $ABCD$ на сторонах AB, BC, CD и DA, соответственно, выбраны точки W, X, Y и Z так, что центры вписанных окружностей треугольников AWZ, BXW, CYX и DZY являются вершинами параллелограмма. Докажите, что четырёхугольник $WXYZ$ также является параллелограммом.

Задача №4. Дано действительное число $c > 0$ и пусть $\mathbb{R}_{>0}$ — множество всех действительных положительных чисел. Найдите все функции $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ такие, что

$$f((c+1)x + f(y)) = f(x+2y) + 2cx$$

для всех $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$.

Задача №5. На плоскости расположены n отрезков. Любая пара отрезков имеет ровно одну общую точку, отличную от концов этих отрезков, но никакие три отрезка не пересекаются в одной точке. Тони и каждый из его $2n-1$ друзей стоят на разных концах данных отрезков. Тони хочет отправить новогодние подарки каждому своему другу следующим образом: Сначала он выбирает на каждом отрезке один из концов и называет его «стоком». Затем он помещает подарок в конец отрезка, где он стоит сам. Подарок перемещается следующим образом:

- Если он находится на отрезке, он движется в сторону стока.
- Когда он достигает пересечения двух отрезков, он переключается на новый отрезок и начинает двигаться в сторону нового стока.
- Если подарок достигает конца отрезка, то друг, находящийся в этом конце, получает свой подарок.

Докажите, что Тони может отправить ровно n подарков $2n-1$ своим друзьям.