beyond curriculum

Решения задач
Beyond Olympiad #2
по математике

19-20 февраля 2022

Младшая лига

1. Докажите, что в группе из 2022 людей существует два человека, у которых одинаковое количество друзей в этой группе.

   Решение. Допустим, утверждение неверно. Тогда у каждого будет разное количество друзей. Так как можно иметь максимум 2021 друзей, у людей этой группы от 0 до 2021 друзей. Но если у кого-то будет 0 друзей, то не может быть человека, у которого их 2021 – он должен дружить со всеми. И наоборот. Поэтому всего максимум 2021 вариантов количества друзей (от 1 до 2021 или от 0 до 2020). По принципу дирихле, найдется два человека с одинаковым количеством друзей.

   Схема оценивания.

   - Объяснение невозможности сосуществования людей с 0 и 2021 друзьями — 3 балла.

2. Пусть a, b, c – положительные числа. Докажите неравенство:

$$\sqrt{ab+bc}+\sqrt{bc+ca}+\sqrt{ac+ab}\leq\sqrt{2}(a+b+c).$$

   Решение 1. Поделим левую часть на $\sqrt{2}$. По неравенству между средними,

$$\sqrt{\frac{a(b+c)}{2}}=\sqrt{a\cdot\frac{(b+c)}{2}}\leq\frac{a+\frac{(b+c)}{2}}{2}$$

   для всех слагаемых. Просуммировав, получаем требуемое.

   Решение 2. Обозначим за LHS и RHS левую и правую часть неравенства, соответственно. Тогда,

$$\begin{aligned}LHS^2&=2(ab+bc+ca)+2\sum_{cyc}\sqrt{(ab+bc)(bc+ca)}\leq\\&\leq 2(ab+bc+ca)+2\sum_{cyc}\frac{(ab+bc)+(bc+ca)}{2}=\\&=6(ab+bc+ca)\leq 2(a+b+c)^2=RHS^2,\end{aligned}$$

   что и требовалось доказать.

Решение 3. По неравенству между средним арифметическим и средним квадратическим имеем, что

$$\frac{LHS}{3} = \frac{\sum_{cyc}\sqrt{ab+bc}}{3} \le \sqrt{\frac{\sum_{cyc}(ab+bc)}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{ab+bc+ca}.$$

Остается доказать, что

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{ab+bc+ca} \le \frac{RHS}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot (a+b+c) \iff$$

$$\iff 3(ab+bc+ca) \le (a+b+c)^2,$$

что верно.

Схема оценивания.

- Возведение неравенства в квадрат — 1 балл;
- Полное решение — 7 баллов.

3. В треугольнике ABC I - центр вписанной окружности. Окружность Ω проходит через точку B и касается прямой AI в точке I. Ω пересекает AB и BC второй раз в точках P и Q соответственно, а прямая QI пересекает AC в точке R. Докажите, что $AR \cdot BQ = PI^2$.

   Решение. Пусть AI пересекает BC в точке D. Используя угол между касательной AD и хордами PI и QI получим, что $\angle PIA = \angle PBI = \angle QBI = \angle QID = \angle RIA$. Также, $\angle RAI = \angle PAI$, следовательно, $\triangle RAI = \triangle PAI$ по двум углам и общей стороне, откуда $PI = RI$. BI – биссектриса $\angle PBQ$, поэтому в окружности Ω хорды PI и QI стягивают равные дуги, откуда $PI = QI$.

   Заметим, что $\angle QIB = \angle BID - \angle QID = \angle PAI + \angle PBI - \angle QID = \angle RAI$, а учитывая $\angle RIA = \angle QBI$ получим, что $\triangle RAI \sim \triangle QIB$. Откуда $AR \cdot BQ = RI \cdot QI = PI^2$.

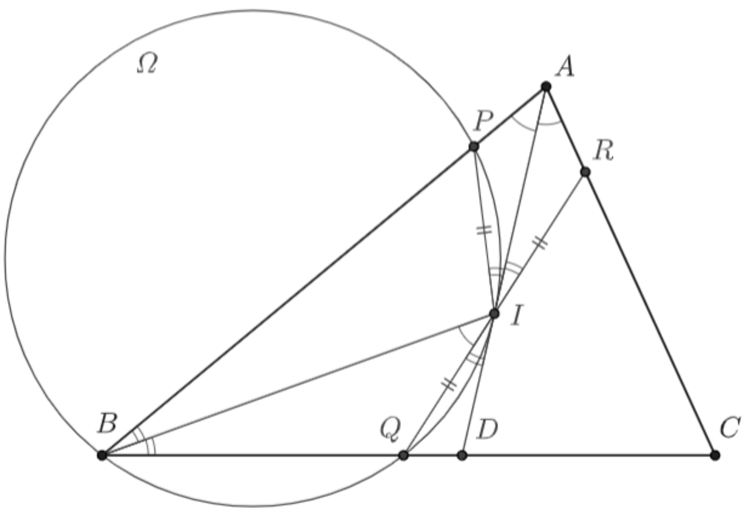

Схема оценивания.

- $\angle PIA = \angle RIA$ — 1 балл;
- $\triangle RAI = \triangle PAI$ — 1 балл;
- $PI = QI$ — 1 балл;
- $\angle QIB = \angle RAI$ — 1 балл;
- $AR \cdot BQ = RI \cdot QI$ — 1 балл.

4. Для действительных чисел x, y выполняется:

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 1552 \\ xy = 24 \end{cases}$$

Чему равно значение $|x + y|$?

Решение. Заметим, что

$$(x^2 + y^2)^2 = (x^4 + y^4) + 2(xy)^2 = 1552 + 2 \cdot 24^2 = 2704 = 52^2.$$

Значит, $x^2 + y^2 = 52$ (сумма квадратов не может быть отрицательной). Теперь получаем $(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy = 52+2\cdot 24 = 100 = 10^2$. То есть, $|x+y| = 10$.

Схема оценивания.

- Нахождение $x^2 + y^2 = 52$ — 3 балла;
- $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = x^2 + y^2 + 48$ — 2 балла.

5. Найдите все решения $p^2 + 3q^2 = 9r^2 + 1$, где p, q, r – простые числа.

Ответ. $(p, q, r) = (5, 2, 2)$.

Решение. Предположим, что оба p, q – нечетные, тогда r нечетно, и левая часть сравнима с 0 по модулю 4, а правая с 2 по модулю 4, что невозможно. Следовательно хотя бы одно из p и q четно, т. е. равняется 2. Рассмотрим 3 случая:

(a) $p = q = 2$. Очевидно, что не существует таких r;

(b) $p = 2,\ q > 2$. Левая сторона уравнения нечетная, следовательно и правая должна быть нечетной. Тогда r четно и поэтому равняется 2. Значит равенство равносильно $4 + 3q^2 = 37$. Понятно, что таких q не существует;

(c) $p > 2,\ q = 2$. Левая сторона уравнения нечетная, следовательно и правая должна быть нечетной. Тогда r четно и поэтому равняется 2. Значит равенство равносильно $p^2 + 12 = 37$, $p = 5$.

Значит единственное решение $(p, q, r) = (5, 2, 2)$.

Схема оценивания.

- Доказательство четности хотя бы одного из p и q — 4 балла;
- Разбор случая — 1 балл.

6. Назовем набор $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ из натуральных чисел *волшебным*, если сумма обратных им чисел равен 1, т. е.

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} = 1.$$

Пусть N – количество упорядоченных волшебных наборов. Найдите четность N. *(Упорядоченный набор – это набор, в котором порядок чисел важен. Например, наборы (1,2,3) и (1,3,2) считаются различными, если они упорядоченные, и одинаковыми, если неупорядоченные.)*

Решение. Разделим a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 на m групп так, что a_i, a_j принадлежат одной группе только если $a_i = a_j$, где $1 \leq i \neq j \leq 5$. Пусть k_i – это количество чисел в группе i. Тогда количество упорядоченных волшебных наборов в которых a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 разделяются на m групп $(k_1, \ldots, k_m)$ будем обозначать как $N(k_1, ...k_m)$. Например, набор $(4, 4, 4, 8, 8)$ будет только учитываться в $N(2, 3) = N(3, 2)$. Тогда,

$$\begin{aligned} N = N(1,1,1,1,1) + N(1,1,1,2) + N(1,2,2) + \\ + N(4,1) + N(3,2) + N(5) + N(1,1,3). \end{aligned}$$

Также, заметим, что каждому неупорядоченному волшебному набору соответствует $\binom{5}{k_1,\ldots,k_m}$ упорядоченных наборов, следовательно

$$\implies \binom{5}{k_1, \ldots, k_m} \mid N(k_1, \ldots, k_m) \qquad (*)$$

Выходит что, $N(1,1,1,1,1)$, $N(1,1,1,2)$, $N(1,2,2)$, $N(3,2)$, $N(1,1,3)$ кратно двум, а значит

$$N \equiv N(4,1) + N(5) \pmod 2 \qquad (**)$$

Осталось рассмотреть $N(4,1)$, $N(5)$:

$N(5)$ – количество упорядоченных волшебных наборов $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$, где все числа равны. Обозначим их как a. Тогда,

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} = \frac{5}{a} = 1 \implies a = 5.$$

Из чего следует, что $N(5) = 1$, т. е. $N(5)$ содержит только один упорядоченный, волшебный набор $(5, 5, 5, 5, 5)$.

$N(4, 1)$ – количество упорядоченных волшебных наборов $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$, где только одно число отличается по значению от других. Обозначим это число как b, остальные как a. Тогда

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} = \frac{4}{a} + \frac{1}{b} = 1 \implies 4b + a = ab.$$

Рассмотрев обе стороны по модулю b, получаем, что a кратно b. Пусть, $a = bm$. Тогда, $4b + a = ab \iff 4b + bm = b^2m \implies 4 + m = bm \implies m \mid 4$. Таким образом, m может принимать только значения 1, 2, 4. Рассмотрим все случаи:

(a) $m = 1 \implies a = b$. Противоречие;

(b) $m = 2 \implies \begin{cases} a = bm \\ 4b + a = ab \end{cases} \implies \begin{cases} a = 2b \\ 4b + 2b = 2b^2 \end{cases} \implies (a, b) = (6, 3);$

(c) $m = 4 \implies \begin{cases} a = bm \\ 4b + a = ab \end{cases} \implies \begin{cases} a = 4b \\ 4b + 4b = 4b^2 \end{cases} \implies (a, b) = (8, 2).$

Получается, $N(4, 1)$ содержит два упорядоченных волшебных наборов $(6, 6, 6, 6, 3)$, $(8, 8, 8, 8, 2)$, т. е. $N(4, 1) = 2$.

Таким образом, $N \equiv N(4, 1) + N(5) \equiv 1 \pmod 2$. Следовательно, N – нечетное число.

Схема оценивания.

- Доказательство $(*)$ — 3 балла;
- Доказательство $(**)$ — 1 балл;
- Нахождение четности $N(5)$ — 1 балл;
- Нахождение четности $N(4, 1)$ — 2 балла.

Старшая лига

1. На вечеринке было 4 пары близнецов. Некоторые люди пожали друг-другу руки, но никто, конечно, не жал руку своему близнецу. К концу вечеринки организатор спросил у остальных сколько раз они пожали руки и получил 7 разных ответов. Сколько раз пожал руки близнец организатора?

Решение. Заметим, что максимальное кол-во рукопожатий – 6. Так как организатор получил 7 разных ответов, то остальные жали руки от 0 до 6 раз.

Рассмотрим человека, который жал руки 6 раз. Он пожал всем, кроме своего близнеца, значит они хотя бы один раз пожали руки. Получается, человек, пожавший руки 0 раз – это близнец того, кто пожал 6 раз.

Далее, рассмотрим человека, который пожал руки 5 раз. Рукопожатия были со всеми, кроме человека с 0 рукопожатиями. Тогда у этих людей будет по 2 рукопожатия (с человеком с 6 и 5 рукопожатиями). Отсюда, человек с 1 рукопожатием будет близнецом того, кто пожал 5 раз.

Теперь рассмотрим человека, который пожал руки 4 раза. Аналогично с предыдущим пунктом, его близнец пожал руки 2 раза.

Несложно понять, что четвертая пара близнецов пожали руки по 3 раза. Так как организатор получил разные ответы, он является одним из них, а значит близнец организатора пожал руки 3 раза.

Схема оценивания.

- Доказательство того, что люди, пожавшие руки 0 и 6 раз, являются близнецами — 2 балла;
- Нахождение количества рукопожатий остальных — 3 балла.

2. Найдите все простые числа p такие что: $(x+y)^{13}-x^{13}-y^{13}$ делились на p для любых натуральных x, y.

Ответ. $p = 2, 3, 5, 7, 13$.

Решение. Рассмотрим $x = 1, y = 1$:

$$2^{13} - 2 = 8190 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13.$$

То есть, p может быть равно только 2, 3, 5, 7, 13. Докажем, что все эти значения подходят. Очевидно, $p = 2$ подходит из-за четности.

Теперь нужно понять, что $x^{13} \equiv x$ для всех значений. Если $x \equiv 0 \pmod p$, утверждение выполняется.

Теперь пусть $(x, p) = 1$. По малой теореме Ферма $x^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. Получаем

$$x^{12} \equiv (x^2)^6 \equiv (x^4)^3 \equiv (x^6)^2 \equiv 1 \pmod n \quad \forall n \in \{3, 5, 7, 13\}.$$

Умножая обе стороны на x, убеждаемся в верности утверждения.

Теперь получаем

$$x^{13} + y^{13} - x - y \equiv x + y - x - y \equiv 0 \pmod p \quad \forall p \in \{3, 5, 7, 13\}.$$

Схема оценивания.

- Доказательство того, что p равно только $2, 3, 5, 7, 13$ — 2 балла;
- Доказательство одного ответа — 1 балл.

3. Диагонали AC и BD равнобедренной трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E. O – центр описанной окружности $ABCD$, O_1 – центр описанной окружности $\triangle BEC$, O_2 – центр описанной окружности $\triangle AED$. Докажите, что $O_1E = OO_2$.

   Решение. Без ограничения общности пусть AD большее основание трапеции.

   Утверждение 1. $ABEO$ и $CEOD$ вписанные четырехугольники.

   Доказательство. В силу симметрии достаточно доказать, что $ABEO$ вписанный.

$$\angle AEB = \angle EAD + \angle EDA = 2\angle ADB,$$

   с другой стороны, поскольку угол $\angle AOB$ – центральный, $\angle AOB = 2\angle ADB$. Следовательно, $\angle AEB = \angle AOB$, и поэтому $ABEO$ – вписанный.

   Утверждение 2. $\triangle BO_1O = \triangle OO_2A$.

   Доказательство.

$$\angle BO_1O = 2\angle BCE = 2\angle BCA = 2\angle BDA = 2\angle EDA = \angle OO_2A. \qquad (1)$$

   Из вписанности $ABEO$ имеем, что $\angle ABE = \angle AOO_2$. При этом, $\angle ABO = \angle AEO = \angle O_1EB = \angle O_1BE$, а из этого следует, что $\angle ABE = \angle OBO_1$. Тогда

$$\angle AOO_2 = \angle OBO_1. \qquad (2)$$

   Из (1) и (2) получаем, что $\triangle BO_1O \sim \triangle OO_2A$, а из $OB = OA$ выходит, что $\triangle BO_1O = \triangle OO_2A$.

   Из утверждения 2 получаем

$$OO_2 = BO_1 = O_1E.$$

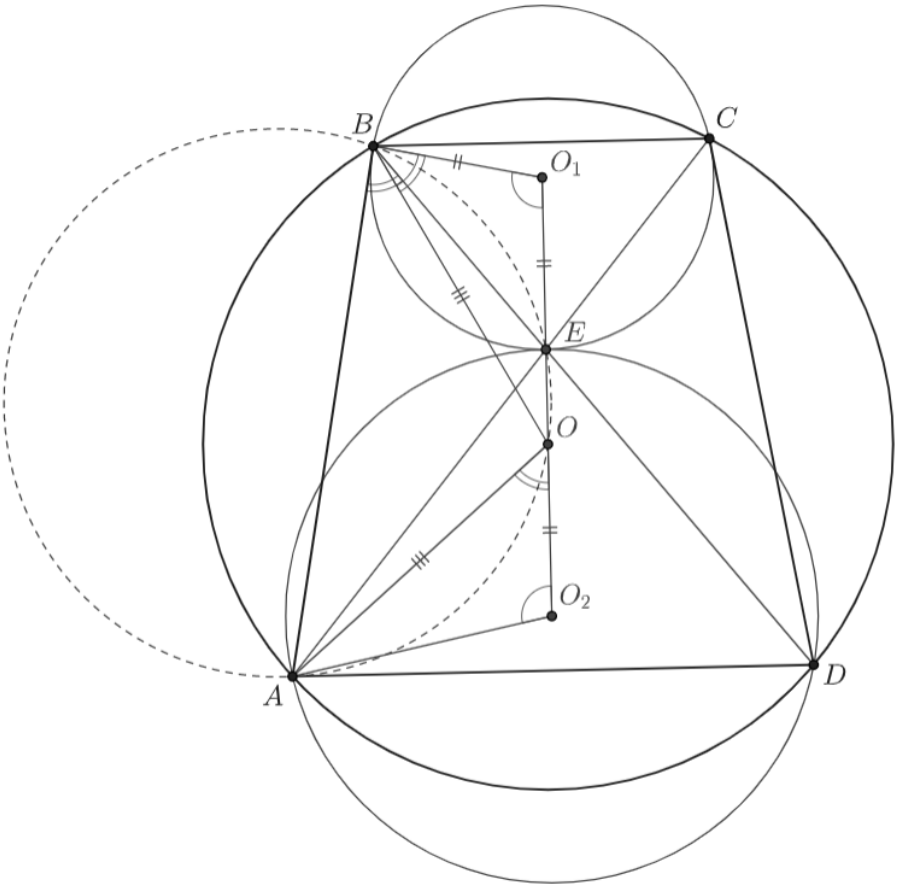

Схема оценивания.

- Доказательство утверждения 1 — 3 балла;
- Полное решение — 7 баллов.

4. В параллелограмме $ABCD$ выбраны точки K, L, M, N на сторонах AB, BC, CD, AD так, что $KN \parallel LM$. Докажите, что прямые KM, LN и AC пересекаются в одной точке.

   Решение. Несложно понять, что $\angle CML = \angle AKN$. Так как $\angle A = \angle C$, $\triangle CML \sim \triangle AKN \Rightarrow \frac{CL}{CM} = \frac{AN}{AK}$.

   Обозначим $LN \cap AC = T$ и $KM \cap AC = R$. В силу $\triangle ATN \sim \triangle CTL$ и $\triangle ARK \sim \triangle CRM$, выполняется

   $$\frac{CT}{TA} = \frac{CL}{NA} = \frac{CM}{KA} = \frac{CR}{RA}$$

   Значит, R и T делят отрезок AC в одинаковом соотношении, поэтому $R = T$, и AC, KM, LN пересекаются в одной точке.

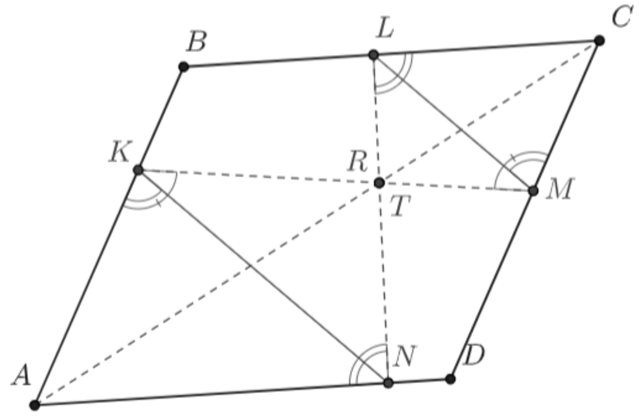

Схема оценивания.

- Доказательство $\frac{CL}{CM} = \frac{AN}{AK}$ — 1 балл;
- Доказательство $\triangle ATN \sim \triangle CTL$ и $\triangle ARK \sim \triangle CRM$ — 2 балла.

5. Назовем набор $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ из натуральных чисел *волшебным*, если сумма обратных им чисел равен 1, т. е.

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} = 1.$$

Пусть N – количество упорядоченных волшебных наборов. Найдите четность N. *(Упорядоченный набор – это набор, в котором порядок чисел важен. Например, наборы (1,2,3) и (1,3,2) считаются различными, если они упорядоченные, и одинаковыми, если неупорядоченные.)*

Решение. См. задачу 6 младшей лиги.

6. Пусть P – многочлен с рациональными коэффициентами степени n. Оказалось, что $P(1), P(2), \ldots, P(n), P(n+1)$ целые числа. Докажите, что $P(m)$ целое число при любом целом m.

Решение. Докажем задачу методом математической индукции по n.

База индукции для $n = 1$:

Многочлен степени 1 имеет вид $P(x) = ax + b$, где $a, b \in \mathbb{Q}$. Мы знаем, что $P(2) = 2a + b, P(1) = a + b$ целые числа. Следовательно, $P(2) - P(1) = a \in \mathbb{Z}$ и $P(1) - a = b \in \mathbb{Z}$. Тогда $P(m) = am + b$ – целое число для любого целого m. База доказана.

Переход индукции:

Положим, что $P(m)$ целое для любого целого m при каждом $n \leq k$. Докажем, что то же самое выполняется при $n = k + 1$. Рассмотрим любой многочлен

$P(x)$ степени $k+1$ такой, что $P(1), P(2), \ldots, P(n), P(n+1)$ целые числа (как пример можем взять $P(x) = x^{k+1}$).

Тогда пусть $Q(x) = P(x+1) - P(x)$. Не сложно понять, что степень Q не больше чем k. При этом $Q(x)$ имеет рациональные коэффициенты, и $Q(i) = P(i+1) - P(i) \in \mathbb{Z}$ для любого натурального $i \leq k$. Следовательно, по предположению индукции $Q(m) = P(m+1) - P(m)$ – целое для любого целого m.

Поэтому, для любого целого i, если $P(i)$ — целое, тогда $Q(i)$ — целое, и, соответственно, $P(i+1)$. Аналогично, если $P(i+1)$ целое, то $P(i)$ тоже.

В итоге получаем, что $P(m) \in \mathbb{Z}\ \forall m \in \mathbb{Z}$. Переход доказан.