Математика пәні бойынша

Beyond Olympiad #2

есептер шешімдері

19-20 ақпан 2022

Төменгі лига

1. 2022 адамнан тұратын топта достар саны бірдей болатны екі адам табылатынын дәлелдеңіз.

   Шешімі. Тұжырым дұрыс емес деп айталық. Онда әр адамда достар саны әртүрлі болады. Адамда ең көп дегенде 2021 дос болуы мүмкін, сонда топтағы адамдарда 0-ден 2021-ге дейін дос болуы мүмкін. Бірақ достары жоқ адам болса, 2021 досы бар адам бола алмайды – ол барлығымен дос болуы керек. Керісінше де солай. Сондықтан да, мүмкін болатын 2021 дос саны бар (0-ден 2020-ге дейін немесе 1-ден 2021-ге дейін). Дирихле принципі бойынша, достар саны бірдей болатын екі адам табылады.

   Бағалау кестесі.

   - 0 және 2021 досы бар екі адамның болуы мүмкін еместігін дәлелдеу — 3 балл.

2. a, b, c – оң сандар болсын. Келесі теңсіздікті дәлелдеңіз:

$$\sqrt{ab+bc}+\sqrt{bc+ca}+\sqrt{ac+ab} \leq \sqrt{2}(a+b+c)$$

   1-шешім. Сол жағын $\sqrt{2}$-ге бөлеміз. Орта мәндер теңсіздігі бойынша бойынша, әр қосылғыш үшін

$$\sqrt{\frac{a(b+c)}{2}} = \sqrt{a \cdot \frac{(b+c)}{2}} \leq \frac{a+\frac{(b+c)}{2}}{2}$$

   орындалады. Теңсіздіктерді қосып шықсақ, есеп дәлелденді.

   2-шешім. Теңсіздіктің сол және оң жағын LHS және RHS деп атайық. Онда

$$\begin{aligned} LHS^2 &= 2(ab+bc+ca) + 2\sum_{cyc}\sqrt{(ab+bc)(bc+ca)} \leq \\ &\leq 2(ab+bc+ca) + 2\sum_{cyc}\frac{(ab+bc)+(bc+ca)}{2} = \\ &= 6(ab+bc+ca) \leq 2(a+b+c)^2 = RHS^2, \end{aligned}$$

   есеп дәлелденді.

3-шешім. Арифметикалық және геометриялық орталар теңсіздігінен:

$$\frac{LHS}{3} = \frac{\sum_{cyc}\sqrt{ab+bc}}{3} \le \sqrt{\frac{\sum_{cyc}(ab+bc)}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{ab+bc+ca}.$$

Онда тек

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{ab+bc+ca} \le \frac{RHS}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot (a+b+c) \iff$$

$$\iff 3(ab+bc+ca) \le (a+b+c)^2,$$

көрсету қалды. Бұл теңсіздіктің дұрыстығына көз жеткізу қиын емес.

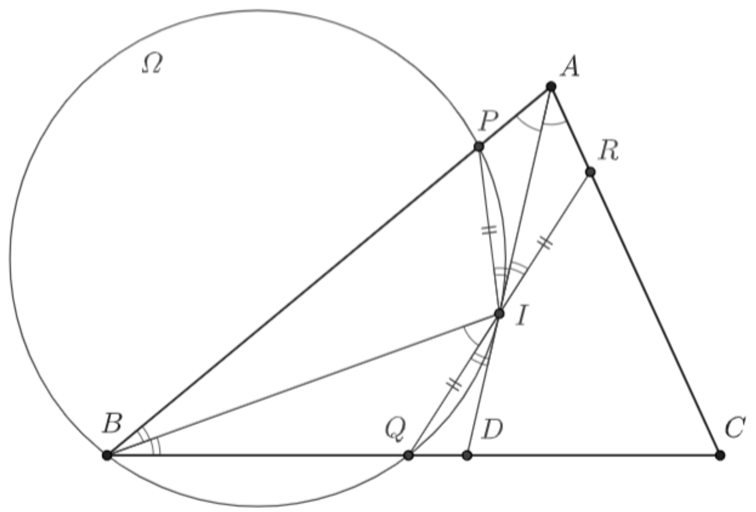
Бағалау кестесі.

- Теңсіздікті квадраттау — 1 балл;
- Толық шешім — 7 баллов.

3. ABC үшбұрышында I – іштей сызылған шеңбердің центрі. Ω шеңбері B нүктесі арқылы өтеді және AI түзуін I нүктесінде жанайды. Ω шеңбері AB мен BC қабырғаларын екінші рет P мен Q нүктелерінде қияды, ал QI түзуі AC қабырғасын R нүктесінде қияды. $AR \cdot BQ = PI^2$ екенін дәлелдеңіз.

Шешімі. AI мен BC D нүктесінде қиылыссын. AD жанамасы мен PI және QI хордалары арасындағы бұрыш қасиетінен $\angle PIA = \angle PBI = \angle QBI = \angle QID = \angle RIA$ шығады. $\angle RAI = \angle PAI$, осыдан қабырға мен 2 бұрыш бойынша $\triangle RAI = \triangle PAI$, демек, $PI = RI$. BI – $\angle PBQ$ биссектрисасы, сондықтан да Ω шеңберінде PI мен QI хордалары бірдей доғаларды кереді, осыдан $PI = QI$.

$\angle QIB = \angle BID - \angle QID = \angle PAI + \angle PBI - \angle QID = \angle RAI$ екенін байқайық, ал $\angle RIA = \angle QBI$ ескерсек, $\triangle RAI \sim \triangle QIB$ аламыз. Осыдан $AR \cdot BQ = RI \cdot QI = PI^2$.



Бағалау кестесі.

- $\angle PIA = \angle RIA$ — 1 балл;
- $\triangle RAI = \triangle PAI$ — 1 балл;
- $PI = QI$ — 1 балл;
- $\angle QIB = \angle RAI$ — 1 балл;
- $AR \cdot BQ = RI \cdot QI$ — 1 балл.

4. x, y нақты сандары үшін

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 1552 \\ xy = 24 \end{cases}$$

орындалады. $|x + y|$ қандай мәнге тең?

Шешімі. Алдымен, $(x^2 + y^2)^2 = (x^4 + y^4) + 2(xy)^2 = 1552 + 2 \cdot 24^2 = 2704 = 52^2$ екенін байқаймыз. Онда $x^2 + y^2 = 52$ (квадраттар қосындысы теріс бола алмайды). Енді $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 52 + 2 \cdot 24 = 100 = 10^2$ аламыз. Ягни, $|x + y| = 10$.

Бағалау кестесі.

- $x^2 + y^2 = 52$ табу — 3 балл;
- $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = x^2 + y^2 + 48$ — 2 балл.

5. p, q, r – жай сандар болатын, $p^2 + 3q^2 = 9r^2 + 1$ теңдігінің барлық шешімдерін табыңыз.

Жауабы. $(p, q, r) = (5, 2, 2)$.

Шешімі. p, q екеуі де тақ деп алайық, она r тақ және теңдеудің сол жағы mod 4 бойынша 0-ге, ол оң жағы 2-ге тең, ол мүмкін емес. Демек, p мен q-дің бірі дегенде жұп, яғни, екіге тең болуы керек. 3 жағдайды қарастырайық:

1) $p = q = 2$. Ондай r жоқ екені айқын.

2) $p = 2,\ q > 2$. Теңдеудің сол жағы тақ болғандықтан, оң жағы да тақ болады. Онда r жұп, яғни 2-ге тең. $4 + 3q^2 = 37$. Ондай q жоқ.

3) $p > 2,\ q = 2$. Қайтадан, теңдеудің сол жағы тақ және r 2-ге тең. $p^2 + 12 = 37$, $p = 5$.

Онда есептің жалғыз шешімі бар: $(p, q, r) = (5, 2, 2)$.

Бағалау кестесі.

- p мен q-дың біреуі дегенде жұп болуын дәлелдеу — 4 балл;

- Бір жағдай қарастыру — 1 балл.

6. $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ натурал сандар жиынын *сиқырлы* деп атайық, егер де оларға кері сандардың қосындысы 1-ге тең болса:

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}=1.$$

N – реттелген сиқырлы жиындар саны болсын. N санының тақ-жұптылығын табыңыз. *(Реттелген жиын – сандар реті маңызды болатын жиын. Мысалы, (1,2,3) және (1,3,2) жиындары реттелген болса, әртүрлі, реттелмеген болса, бірдей болып саналады.)*

Шешімі. a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 сандарының арасында $1 \le i \ne j \le 5$ үшін $a_i = a_j$ болса, онда a_i мен a_j бір топқа жататындай етіп осы 5 санды m топқа бөлейік. k_i – i тобындағы сандар саны болсын. Онда $(k_1, ...k_m)$ m топтарына бөлінетін реттелген сиқырлы a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 жиындар санын $N(k_1, ...k_m)$ деп белгілейік. Мысалы, $(4, 4, 4, 8, 8)$ жиыны тек $N(2, 3) = N(3, 2)$ ішінде саналады.

Онда $N = N(1, 1, 1, 1, 1) + N(1, 1, 1, 2) + N(1, 2, 2) + N(4, 1) + N(3, 2) + N(5) + N(1, 1, 3)$.

Әр реттелмеген сиқырлы жиынға $\binom{5}{k_1,...k_m}$ реттелген жиын сәйкес келетінін байқамыз $\Rightarrow \binom{5}{k_1,...k_m} \mid N(k_1, ...k_m)$. [1]

Сондықтан, $N(1, 1, 1, 1, 1)$, $N(1, 1, 1, 2)$, $N(1, 2, 2)$, $N(3, 2)$, $N(1, 1, 3)$ екіге бөлінеді $\Rightarrow N \equiv N(4, 1) + N(5) \mod 2$. [2]

$N(4, 1)$ мен $N(5)$ қарастыру ғана қалды:

$N(5)$ – барлық сандары бір-біріне тең болатын $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ реттелген сиқырлы жиындар саны. Жиынның сандарын a деп алсақ,

$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}=\frac{5}{a}=1 \Rightarrow a = 5$

$N(4, 1)$ – бір санын b, қалғандарын a деп ала алатын $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ реттелген сиқырлы жиындар саны. Онда: $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}=\frac{4}{a}+\frac{1}{b}=1 \Rightarrow 4b+a = ab$. Теңдікті b модулі бойынша қарастырсақ, a b-ға бөлінетінін аламыз. $a = bm$ болсын. $4b + a = ab \Leftrightarrow 4b + bm = b^2m \Rightarrow 4 + m = bm \Rightarrow m \mid 4$. Ол дегеніміз, m тек 1, 2, 4 мәндеріне тең бола алады.

$m = 1 \Rightarrow a = b$. Қайшылық.

$$m = 2 \Rightarrow \begin{cases} a = bm \\ 4b + a = ab \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2b \\ 4b + 2b = 2b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 3 \end{cases}.$$

$$m = 4 \Rightarrow \begin{cases} a = bm \\ 4b + a = ab \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4b \\ 4b + 4b = 4b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 2 \end{cases}.$$

Осыдан, $N(4,1)$ ішінде $(6,6,6,6,3)$ мен $(8,8,8,8,2)$ реттелген сиқырлы жиындар бар, яғни $N(4,1)=2$.

Осылайша, $N \equiv N(4,1)+N(5) \equiv 1 \mod 2$. Онда N – тақ сан.

Бағалау кестесі

- [1] дәлелдеу — 3 балл;
- [2] дәлелдеу — 1 балл;
- $N(5)$ тақ-жұптылығын табу — 1 балл;
- $N(4,1)$ тақ-жұптылығын табу — 2 балл.

Жоғарғы лига

1. Тойға 4 егіз жұптар келген. Кейбіреулері бір-бірімен қол алмасты, бірақ екі егіз бір-бірімен, әрине, қол алмасқан жоқ. Тойдың соңында тамада болған бірі қалғандарынан неше рет қол алмасқанын сұрады да, 7 әртүрлі жауап алды. Тамаданың егізі неше рет қол алмасты?

   Шешімі. Адам ең көп дегенде 6 рет қол алмаса алатынын байқайық. Тамада 7 әртүрлі жауап алғандықтан, қалғандары 0-ден 6-ға дейін рет қол алмасты.

   6 рет қол беріскен адамды қарастырайық. Ол өз егізінен басқа барлығымен қол алмасты, яғни қалғандары кем дегенде 1 рет қол алмасты. Онда 0 рет қол алмасқан адам – 6 рет алмасқанның егізі.

   Келесі, 5 рет қол алмасқан адамды қарастырайық. Ешкіммен қол алмаспаған адамнан басқа, ол бәрімен қол берісті. Онда сол адамдар кем дегенде 2 рет қол алмасты (5 және 6 рет қол беріскендермен). Осыдан, 1 рет қол алмасқан адам – 5 рет алмасқанның егізі болады.

   Енді 4 рет қол алмасқан адамды қарастырайық. Алдыңғы тұжырымдағыдай, оның егізі 2 рет қол алмасты.

   Төртінші жұп егіздер 3 реттен қол беріскенін түсіну қиын емес. Тамада әртүрлі жауап алғандықтан, ол сол төртінші жұп егізі, онда оның егізі 3 рет қол алмасты.

   Бағалау кестесі.

   - 0 және 6 рет қол беріскен адамдар егіз екенін дәлелдеу — 2 балл;
   - Қалғандардың қол беріскен санын табу — 3 балл.

2. Кез келген натурал x, y сандары үшін $(x+y)^{13}-x^{13}-y^{13}$ мәні p-ға бөлінетіндей, барлық жай p сандардын табыңдар.

Жауабы. $p = 2, 3, 5, 7, 13$.

Шешімі. $x = 1,\ y = 1$ қарастырайық: $2^{13} - 2 = 8190 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$. Онда, p тек 2, 3, 5, 7, 13 сандарына тең бола алады. Олардың барлығы да келетінін дәлелдейік. $p = 2$ келетіні өрнектің жұп мәнге ие болуынан айқын.

Енді $x^{13} \equiv x$ барлық мәндер үшін орындалатынын түсіну керек. $x \equiv 0\ (mod\ p)$ болса, тұжырым орындалады.

Енді $(x, p) = 1$ болсын. Ферманың кіші теоремасы бойынша, $x^{p-1} \equiv 1\ (mod\ p)$. Осыдан

$$x^{12} \equiv (x^2)^6 \equiv (x^4)^3 \equiv (x^6)^2 \equiv 1\ (mod\ 3, 5, 7, 13)$$

аламыз. Екі жақты x-ке көбейтсек, тұжырымның дұрыстығына көз жеткіземіз.

Енді әр $p = 3, 5, 7, 13$ үшін $x^{13} + y^{13} - x - y \equiv x + y - x - y \equiv 0\ (mod\ p)$ екенін аламыз.

Бағалау кестесі.

- [1] табу — 2 балл;
- Бір жауапты дәлелдеу — 1 балл.

3. $ABCD$ теңбүйірлі трапециясының AC мен BD диагональдары E нүктесінде қиылысады. O – $ABCD$-ға сырттай сызылған шеңбердің центрі, O_1 – $\triangle BEC$-ға сырттай сызылған шеңбердің, O_2 – $\triangle AED$-ға сырттай сызылған шеңбердің центрі болсын. $O_1E = OO_2$ екенін дәлелдеңіз.

Шешімі. Жалпы жағдайды шектеусіз, AD – трапецияның үлкен табаны болсын.
1-тұжырым. $ABEO$ мен $CEOD$ – шеңберге іштей сызылған төртбұрыштар.
Дәлелдемесі. Симметрияға сәйкес, $ABEO$ үшін дәлелдеу жеткілікті.

$$\angle AEB = \angle EAD + \angle EDA = 2\angle ADB,$$

басқа жағынан қарағанда, $\angle AOB$ – центрлік бұрыш болғандықтан, $\angle AOB = 2\angle ADB$. Осыдан, $\angle AEB = \angle AOB$, сондықтан да $ABEO$ – шеңберге іштей сызылған.
2-тұжырым. $\triangle BO_1O = \triangle OO_2A$.
Дәлелдемесі.

$$\angle BO_1O = 2\angle BCE = 2\angle BCA = 2\angle BDA = 2\angle EDA = \angle OO_2A. \quad (1)$$

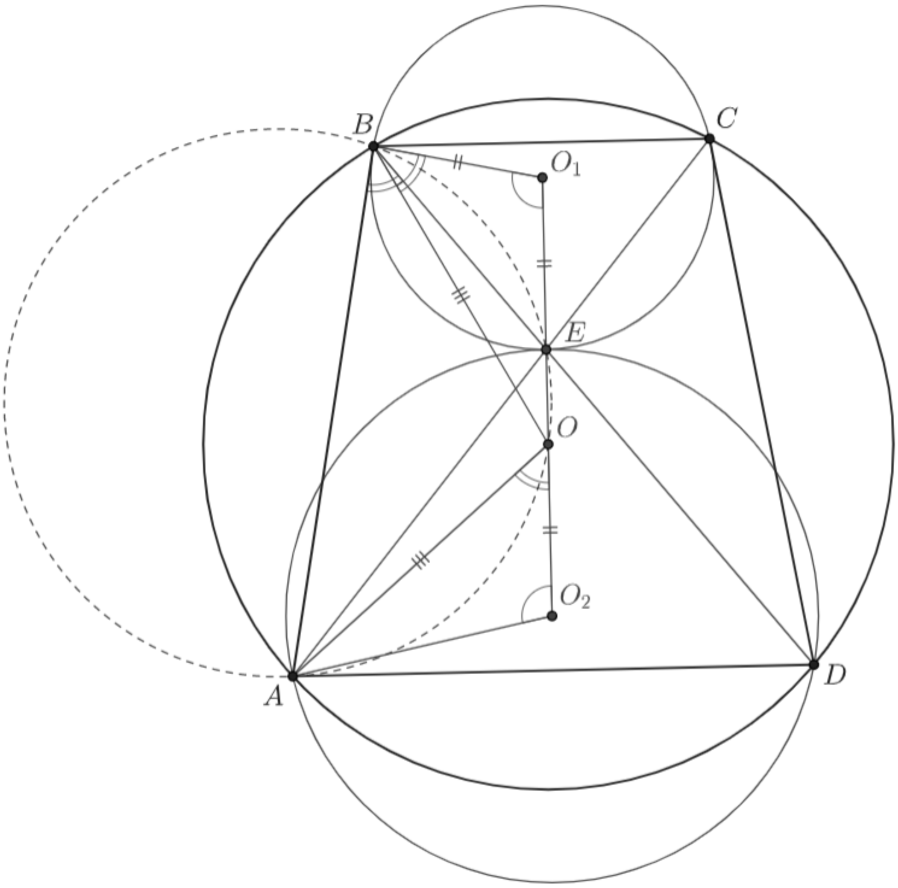
$ABEO$ шеңберге іштей сызылғандықтан, $\angle ABE = \angle AOO_2$. Және де $\angle ABO = \angle AEO = \angle O_1EB = \angle O_1BE$, осыдан, $\angle ABE = \angle OBO_1$. Онда

$$\angle AOO_2 = \angle OBO_1. \quad (2)$$

(1) мен (2)-ден, $\triangle BO_1O \sim \triangle OO_2A$ аламыз, ал $OB = OA$ болғандықтан, $\triangle BO_1O = \triangle OO_2A$.

2-тұжырымнан:

$$OO_2 = BO_1 = O_1E$$



Бағалау кестесі.

- 1-тұжырымды дәлелдеу — 3 балл;
- Толық шешім — 7 балл.

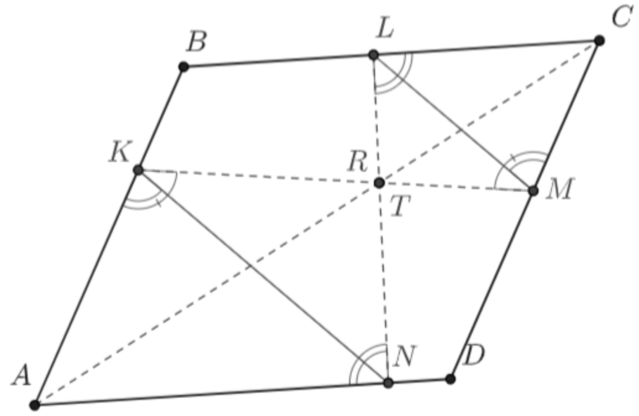
4. $ABCD$ паралеллограмының AB, BC, CD, AD қарбырғаларында сәйкесінше K, L, M, N нүктелері алынған және $KN \parallel LM$. KM, LN және AC түзулері бір нүктеде қиылысатынын дәлелдеңіз.

Шешімі. $\angle CML = \angle AKN$ екенін түсіну қиын емес. $\angle A = \angle C$ болғандықтан, $\triangle CML \sim \triangle AKN \Rightarrow \frac{CL}{CM} = \frac{AN}{AK}$.

$LN \cap AC = T$ және $KM \cap AC = R$ деп белгілейік. $\triangle ATN \sim \triangle CTL$ және $\triangle ARK \sim \triangle CRM$ болғандықтан,

$$\frac{CT}{TA} = \frac{CL}{NA} = \frac{CM}{KA} = \frac{CR}{RA}$$

орындалады. Онда, R мен T AC кесіндісін бірдей қатынаста боледі, осыдан, $R = T$ және AC, KM, LN бір нүктеде қиылысады.



Бағалау кестесі.

- $\frac{CL}{CM} = \frac{AN}{AK}$ дәлелдеу — 1 балл;
- $\triangle ATN \sim \triangle CTL$ және $\triangle ARK \sim \triangle CRM$ дәлелдеу — 2 балл.

5. $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ натурал сандар жиынын *сиқырлы* деп атайық, егер де оларға кері сандардың қосындысы 1-ге тең болса:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} = 1.$$

N – реттелген сиқырлы жиындар саны болсын. N санының тақ-жұптылығын табыңыз. *(Реттелген жиын – сандар реті маңызды болатын жиын. Мысалы, (1,2,3) және (1,3,2) жиындары реттелген болса, әртүрлі, реттелмеген болса, бірдей болып саналады.)*

Шешімі. Кіші лиганың 6-шы есебін қараңыз.

6. P – рационал коэфициентті n дәрежелі көпмүше болсын. $P(1)$, $P(2)$, $\ldots$, $P(n)$, $P(n+1)$ – бүтін сандар болып шықты. Кез келген бүтін m үшін $P(m)$ бүтін болатынын дәлелдеңіз.

Шешімі. Есепті n бойынша математикалық индукция әдісімен дәлелдейік.

$n = 1$ үшін индукция негізі:

1-дәрежелі көпмүше $P(x) = ax+b$ түрде болады, $a, b \in \mathbb{Q}$. $P(2) = 2a+b, P(1) = a + b$ бүтін сандар екенін білеміз. Сондықтан да, $P(2) - P(1) = a \in \mathbb{Z}$ және $P(1)-a = b \in \mathbb{Z}$. Онда $P(m) = am+b$ – кез келген бүтін m үшін бүтін болады. Негіз дәлелденді.

Индукция қадамы:

Әр $n \leq k$ үшін $P(m)$ кез келген бүтін m үшін бүтін деп алайық. $n = k+1$ болғанда да тұжырым орындалатынын дәлелдейік. $P(1), P(2), \ldots, P(n), P(n+1)$ бүтін болатындай кез келген бір $k+1$ дәрежелі $P(x)$ көпмшүені қарастырайық (мысалы, $P(x) = x^{k+1}$ ала аламыз).

Онда $Q(x) = P(x+1) - P(x)$ болсын. Q дәрежесі k-дан артық емес екені түсінікті. Оған қоса, $Q(x)$ рационал коэфициентті және кез келген натурал $i \leq k$ үшін $Q(i) = P(i+1) - P(i) \in \mathbb{Z}$. Онда, индукция болжамы бойынша, $Q(m) = P(m+1) - P(m)$ – кез келген бүтін m үшін бүтін.

Сондықтан, кез келген бүтін i үшін, егер де $P(i)$ — бүтін болса, онда $Q(i)$ — бүтін және, сәйкесінше, $P(i+1)$. Дәл солай, егер $P(i+1)$ бүтін болса, $P(i)$ да бүтін болады.

Ақыры $P(m) \in \mathbb{Z}\ \forall m \in \mathbb{Z}$ екеніне келеміз. Индукция қадамы дәлелденді.