

Комплект задач  
Beyond Olympiad #2  
по математике II тур  
10-12 классы  
20 января 2022

## РЕГЛАМЕНТ ОЛИМПИАДЫ

---

На выполнение олимпиады Вам дается 3 часа. Начало олимпиады: 11:00 по времени Алматы, конец олимпиады – 14:00. По завершении ваши решения необходимо отправить с помощью платформы [Gradescope](#).

### Инструкция по выполнению и оформлению:

Выполнять задания Вы можете в любом порядке, при этом необходимо

- Оформлять каждую задачу на отдельном листе;
- Вверху листа писать номер задачи, но при этом запрещается писать ФИО, инициалы или какие-либо другие личные идентификаторы;
- Если решение задачи требует больше одного листа, то в конце страницы следует написать "(Продолжение задачи на следующей странице)". При этом вверху следующей страницы необходимо пометить, что это является продолжением определенной задачи;
- Рекомендуется придерживаться понятного и разборчивого почерка, избегать грязи и зачеркиваний.

### Инструкции по отправке решений:

Необходимо завершить выполнение заданий не позднее 14:00 по времени Алматы. По окончании работы, вам необходимо объединить сканы ваших решений в один pdf-файл. Отметим, что в Google Play и AppStore есть множество приложений (PDF scanner, scanner app, scanbot и другие), предназначенных для этих целей. PDF-файл необходимо загрузить на сайт [Gradescope](#). Код курса: P536BW.

### Памятка участнику:

- Из канцелярских принадлежностей **разрешаются только**: карандаши, ручки, ластик, линейка, циркуль;
- **Строго запрещается** пользоваться помощью посторонних людей и дополнительной литературой, включая интернет-источники и учебные пособия;
- Попытки списывания и нарушения академической честности будут **наказаны баном** на [ask.bc-pf.org](#) сроком на год.

Результаты будут оглашены до xx февраля 2022 года.

При наличии вопросов по проведению олимпиады следует также писать на форум [ask.bc-pf.org](#) или в официальные аккаунты соц. сетей ОФ “Beyond Curriculum”.

## УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

---

1. В параллелограмме  $ABCD$  выбраны точки  $K, L, M, N$  на сторонах  $AB, BC, CD, AD$  так, что  $KN \parallel LM$ . Докажите, что прямые  $KM, LN$  и  $AC$  пересекаются в одной точке.
2. Назовем набор  $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$  из натуральных чисел *волшебным*, если сумма обратных им чисел равен 1, т. е.

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} = 1.$$

Пусть  $N$  – количество упорядоченных волшебных наборов. Найдите четность  $N$ . (*Упорядоченный набор – это набор, в котором порядок чисел важен. Например, наборы  $(1, 2, 3)$  и  $(1, 3, 2)$  считаются различными, если они упорядоченные, и одинаковыми, если неупорядоченные.*)

3. Пусть  $P$  – многочлен с рациональными коэффициентами степени  $n$ . Оказалось, что  $P(1), P(2), \dots, P(n), P(n+1)$  целые числа. Докажите, что  $P(m)$  целое число при любом целом  $m$ .