Решения задач
Beyond Olympiad #1
по математике

22-23 июня 2021

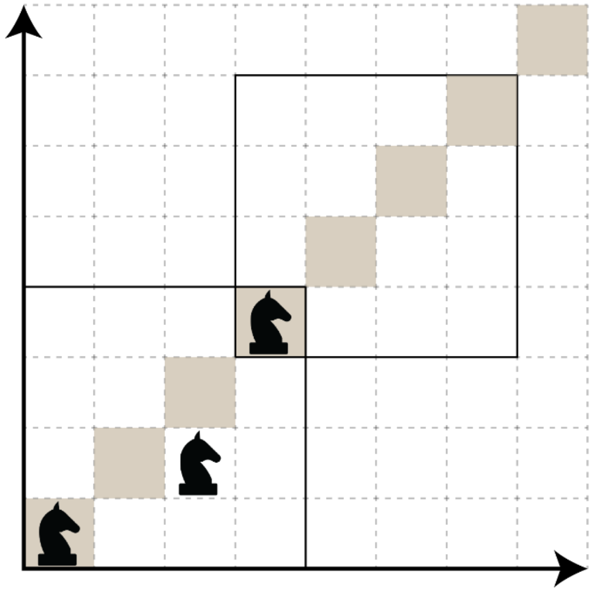
Условия и решения

9 класс

1. Тамирлан и Дидар играют следующую игру на доске 2021×2021. В левом нижнем углу стоит конь. Игрок на своем ходу обязан ходить таким ходом коня, который ведёт его и вправо, и вверх. Начинает Тамирлан. Проиграет тот, кто не сможет сделать ход. Кто сможет гарантированно выиграть вне зависимости от ходов соперника?

   Ответ: Дидар.

   Решение. Заметим, что есть только два варианта хода:
   1 клетка вправо + 2 наверх — ход №1;
   2 клетки вправо + 1 наверх — ход №2.

   Каждый ход Дидара будет отличным от предыдущего хода Тамирлана. Тогда получится, что Дидар всегда может вернуть коня на главную диагональ, на 3 клетки дальше от предыдущей позиции. То есть, Дидар будет попадать во все клетки диагонали, оставляющие остаток 1 по модулю 3. Значит, в итоге он попадет в клетку 2020×2020. Очевидно, что из этой клетки Тамирлан не сможет сделать ход. Поэтому, Дидар победит.

   Схема оценивания.
   - За утверждение, что коня можно вернуть на главную диагональ — 4 балла.
   - За попытку выведения ответа через деление 2021 на 3 — 1 балл.
   - За упоминание того, что Дидар сможет попасть в клетку 2020×2020 — 1 балл.
   - Полное решение — 7 баллов.

2. В треугольник ABC вписана окружность с центром в I, касающая AB и AC в точках M и N, соответственно. Прямые MN и BI пересекаются в точке X. Докажите, что $\angle CXB = 90^\circ$.

   Решение. Пусть углы треугольника $\angle A$ и $\angle B$ равны 2α и 2β соотвественно. BI и CI —биссектрисы углов $\angle B$ и $\angle C$. Значит, $\angle ABI = \angle IBC = \beta$ и $\angle ICB = \angle ICA = 90^\circ - \alpha - \beta$.

Рассмотрим ΔAMN. В нем AM и AN — касательные ко вписанной окружности, следовательно, $AM = AN$. Т. е. ΔAMN равнобедренный. Тогда $\angle AMN = \angle ANM = \frac{180^\circ - \angle MAN}{2} = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$. $\angle XIC$— внешний угол треугольника ΔBIC, поэтому $\angle XIC = \angle IBC + \angle ICB = \beta + \ 90^\circ - \alpha - \beta \ = 90^\circ - \alpha$. Так как $\angle ANM = \angle XNC = XIC = 90^\circ - \alpha$, четырехугольник $NXIC$ — вписанный. Поэтому, $\angle CXI = \angle CNI$. Угол между касательной и радиусом, проведенным в точке касания, является прямым, поэтому IN перпендикулярно AC. Следовательно, $\angle CNI = \angle CXI = CXB = 90^\circ$.

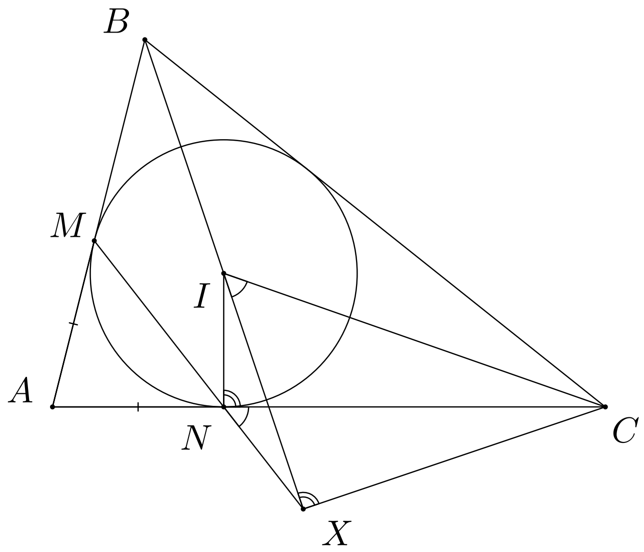


Схема оценивания.

- Доказательство вписанности $NXIC$ — 5 баллов.
- Полное решение — 7 баллов.

3. Натуральное число N называется *чудесным,* если его разложение на простые множители $N = p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_k^{x_k}$ удовлетворяет

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = p_1 + p_2 + \dots + p_k.$$

Найдите все чудесные числа, меньшие 2021.

Ответ: $4, 27, 48, 72, 108, 162, 320, 800, 1792, 2000$.

Решение. Докажем сначала, что $k \leq 3$. В противном случае есть хотя бы 4 простых числа. Но тогда $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 \geq 2 + 3 + 5 + 7 \geq 17$. С другой стороны,

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 \geq 17 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N > 2^{x_1} \cdot 2^{x_2} \cdot 2^{x_3} \cdot 2^{x_4} = 2^{x_1 + x_2 + x_3 + x_4} = 2^{17} > 2021,$$

и мы получаем противоречие. Поэтому достаточно разобрать три случая.

Случай 1: $k = 3$. БОО $p_1 < p_2 < p_3$. Тогда

$$N = p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdot p_3^{x_3} > 2^{x_1} \cdot 2^{x_2} \cdot 4^{x_3} = 2^{x_1 + x_2 + 2x_3} = 2^{p_1 + p_2 + p_3 + x_3} =$$

$$= 2^{10+x_3} \geq 2^{2+3+5+x_3} = 2^{10+x_3} \geq 2^{11} > 2021.$$

Снова вышли к противоречию. Следовательно, для $k = 3$ решений нет.

Случай 2: $k = 2$. Аналогично предыдущему случаю, мы имеем $p_1 + p_2 = x_1 + x_2 \leq 10$. Тогда мы ограничены простыми числами $2, 3, 5, 7$, и мы разберём несколько подслучаев с каждой возможной парой: $2,3$, $2,5$, $2,7$, $3,5$,$(3,7)$.

Подслучай 1: $x_1 + x_2 = 2 + 3 = 5$. Получаем решения $N = 3^4 \cdot 2, 3^3 \cdot 2^2, 3^2 \cdot 2^3, 3 \cdot 2^4$.

Подслучай 2: $x_1 + x_2 = 2 + 5 = 7$. $5^4 \cdot 2^3 > 2021$, так что допустимые решения в этом случае $N = 5^3 \cdot 2^4, 5^2 \cdot 2^5, 5 \cdot 2^6$.

Подслучай 3: $x_1 + x_2 = 2 + 7 = 9$. Единственным решением, меньшим 2021, будет $N = 2^8 \cdot 7$.

Подслучай 4: $x_1 + x_2 = 3 + 5 = 8$. Так как $3^7 \cdot 5 > 2021$, в данном подслучае решений нет.

Подслучай 5: $x_1 + x_2 = 3 + 7 = 10$. Так как $3^9 \cdot 7 > 2021$, в данном случае решений нет.

Случай 3: $k = 1$. Здесь нам подходят $N = 2^2, 3^3$.

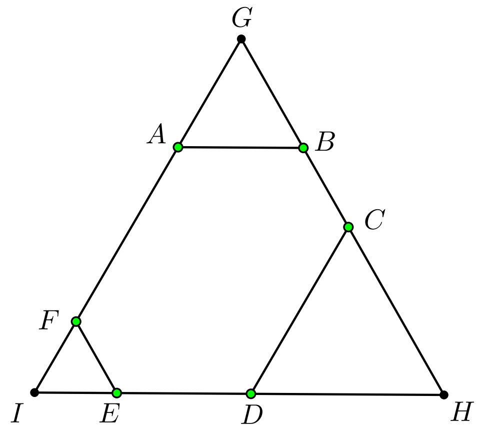
Итого, получаем, что чудесными являются числа
$4, 27, 48, 72, 108, 162, 320, 800, 1792, 2000$.

Схема оценивания.

- Доказательство, что $k \leq 3$ — 3 балла.
- За каждый разобранный случай — 1 балл.
- Если в ответе упущены чудесные числа или добавлены неверные, то штраф в 1-2 балла в зависимости от их количества.

4. В шестиугольнике $ABCDEF$ все углы равны. Докажите, что

$$AB - DE = EF - BC = CD - FA.$$



Решение. В силу того, что сумма углов в любом шестиугольнике равна 720°, каждый угол $ABCDEF$ равен 60°. Пусть FA пересекает BC и DE в точках G и I, соответственно. BC пересекает DE в точке

H. Тогда ABG, CDH, EFI и GHI будут равносторонниими треугольниками со сторонами равными a, b, c, s. Тогда $AB - ED = a - (s - b - c) = a + b + c - s$ также как $EF - BC$ и $CD - FA$.

Схема оценивания.

- Полное решение — 7 баллов.

5. Определим числа R и S следующим образом

$$R = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{223}{224}, \qquad S = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{224}{225}.$$

Докажите, что $R < \frac{1}{15} < S$.

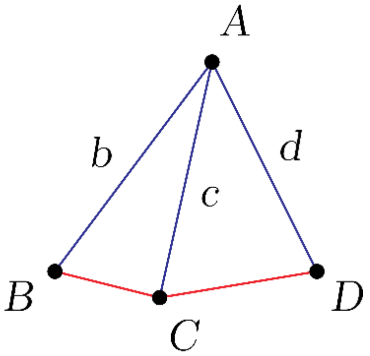
Решение. Заметим, что каждая дробь входящая в произведение R меньше чем соответствующее в S. Например, $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$, $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$, и так далее. Откуда следует, что $R < S$. А в силу того, что $R \cdot S = \frac{1}{225}$, имеем, что $R < \frac{1}{15} < S$. Иначе $R \cdot S$ будет либо меньше, либо больше $\frac{1}{15}$.

Схема оценивания.

- Доказательство, что $R < S$ — 3 балла.
- Полное решение — 7 баллов.

6. В стране Графляндии есть 600 городов, и каждые два города соединены дорогой. Каждую дорогу отметили одним из двух цветов. Пусть *треугольник* — набор из трех городов. Докажите, что в Графляндии существует 100 треугольников с вершинами в 300 различных городах, что все 300 дорог данных треугольников одного цвета.

Решение. Представим задачу через граф, где города являются его вершинами, а дороги — его ребрами, соединяющие эти вершины. Назовем треугольник с ребрами одного цвета *одноцветным*.



Лемма: В любом полном графе из 6 вершин с ребрами, покрашенными в один из двух цветов, найдется треугольник, стороны которого покрашены в один цвет.

Доказательство леммы: Допустим, лемма неверна. Будем красить ребра в красный и синий. Рассмотрим вершину A и выходящие из нее 5 ребра. По принципу Дирихле, как минимум три ребра из них будут одного цвета. Назовем эти ребра b, c и d, а вершины, соединенные этими ребрами с A, назовем B, C и D, соответственно.

Без ограничения общности, ребра b, c и d покрашены в красный. Тогда ребра BC, CD и BD покрашены в синий цвет, иначе будет образован треугольник с ребрами красного цвета. Однако, в таком случае ребра BC, CD и BD образовывают одноцветный треугольник — противоречие. Лемма доказана.

Из леммы следует, что в данном графе с 600 вершинами среди любых 6 вершин найдется одноцветный треугольник. Теперь каждым разом будем выбирать любые 6 вершин нашего графа и убирать из них три вершины, образующие одноцветный треугольник. Всего таких операций можно проделать только 199 раз, что означает мы смогли из графа убрать 199 одноцветных треугольников с различными вершинами. Тогда по принципу Дирихле следует, что в этих 199 получившихся треугольниках найдутся как минимум 100 треугольников одного цвета.

Схема оценивания.

- Доказательство и использование леммы — 3 балла.
- Доказательство существования в графе 199 треугольников с ребрами одинакового цвета — 3 балла.
- Полное решение — 7 баллов.

10 класс

1. (См. задачу 9.3.)

2. 2021 записана в виде суммы нескольких натуральных слагаемых. Найдите максимально возможное произведение этих слагаемых.

   Ответ: $2 \cdot 3^{673}$.

   Решение. Рассмотрим разложение с максимальным произведением X. Оно существует, так как кол-во разложений конечно; если нужных разложений будет несколько, рассмотрим любое из них. В нем отсутствуют числа больше четырех. Иначе если существует $a > 4$, то мы можем рассмотреть то же разложение, только с числами 2 и $a - 2$, вместо a. Произведение в нем будет больше, так как $2(a-2) > a$ для $a > 4$, что противоречит определению X. Если в разложении есть 4, то их можно заменить на две 2. Произведение не изменится.

   Таким образом, мы получили разложение с максимальным произведением, где присутствуют только числа 2, 3. Если в разложении есть не меньше трех 2, то 2, 2, 2 можно заменить на 3, 3. Произведение станет больше, так как $3 \cdot 3 = 9 > 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$, что противоречит максимальности. Поэтому в разложении не больше двух двоек.

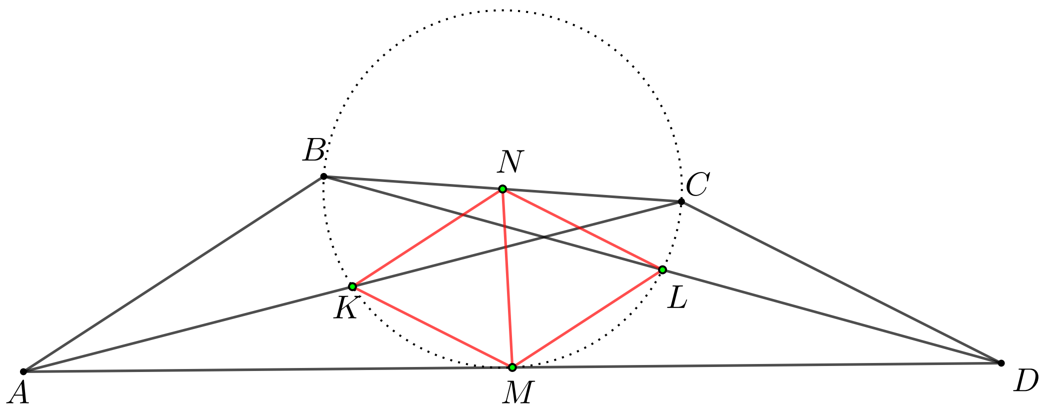
   Рассмотрение по модулю три дает нам, что в сумме может быть всего одно слагаемое, равное двойке. Это дает нам ответ, равный $2 \cdot 3^{673}$.

Схема оценивания.

- Доказательство того, что в максимальном возможном произведении все числа не превосходят 4 — 3 балла.
- Доказательство, что в максимальном произведении не встречаются три двойки — 2 балла.
- Полное решение — 7 баллов.

3. В четырехугольнике $ABCD$ стороны AB, BC и CD равны, M — середина стороны AD. Известно, что $\angle BMC = 90^\circ$. Найдите угол между диагоналями четырехугольника $ABCD$.

Ответ: 30°.



Решение. Пусть N — середина стороны BC; K, L — середины диагоналей. KN, NL, LM, MK — средние линии треугольников ABC, BCD, CDA, DAB и все равны $\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD$. В силу того, что $AB = BC = CD$ и $BMC = 90^\circ$, имеем равенства $BN = KN = NL = NC = NM$. Откуда получаем, что B, K, L, C, M лежат на одной окружноси с диаметром BC и с центром в N. Также из выведенных равенств получаем, что треугольники KNM и NLM являются равносторонними.

Угол между диагоналями четырехугольника равен половине суммы дуг CL и BK,

$$\frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{CL} + \overset{\frown}{BK}\right) = \frac{1}{2}\left(180^\circ - \overset{\frown}{LM} - \overset{\frown}{MK}\right) = \frac{1}{2}(180^\circ - 60^\circ - 60^\circ) = 30^\circ.$$

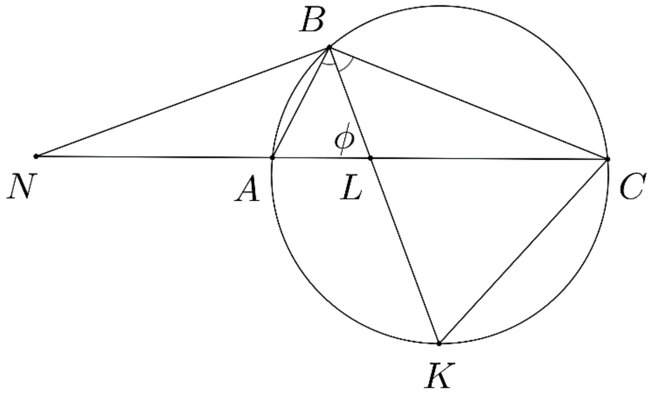
Схема оценивания.

- Рассмотрение точек K и L и доказательство, что B, K, M, L, C лежат на одной окружности — 4 балла.

- За доказательство, что треугольники ΔNKM и ΔNLM равносторонние — 2 балла.
- Полное решение — 7 баллов.

4. Продолжение биссектрисы BL треугольника ABC пересекает его описанную окружность в точке K. Биссектриса внешнего угла B пересекает продолжение отрезка CA за точку A в точке N. Докажите, что если $BK = BN$, то отрезок LN равен диаметру описанной окружности треугольника ABC.

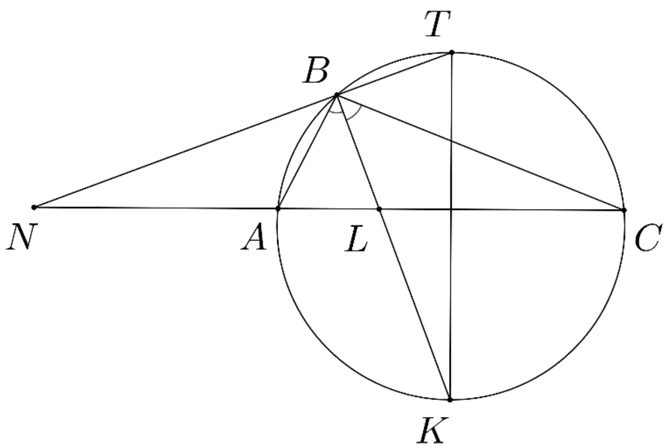
Решение 1. Пусть $\angle BLN = \phi$. Тогда $\angle BCK = \angle BCA + \angle ACK = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AK}\right) = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CK}\right) = \phi$. Заметим, что $\angle LBN = 90^\circ$ как угол между внутренними и внешними биссектрисами. Тогда $BK = BN = BL \tan\phi$, поэтому,



$$\frac{BK}{\sin\phi} = \frac{BL}{\cos\phi}.$$

Глядя на треугольник ΔLBN можем обнаружить, что правая часть равенства выше равна NL. Причем левая часть, из теоремы синусов, равна удвоенному радиусу описанной окружности треугольника ΔBCK. Что и требовалось доказать.

Решение 2. Пусть T — середина дуги $\overset{\frown}{ABC}$. Тогда TK — диаметр окружности, $\angle TBK = 90^\circ$ и точка T лежит на прямой BN. Заметим, что



$$\angle BNL = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{TC} - \overset{\frown}{AB}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AT} - \overset{\frown}{AB}\right) = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BT} = \angle BKT.$$

Следовательно, прямоугольные треугольники NBL и KBT равны по катету и острому углу, откуда $LN = TK$, что завершает доказательство.

Схема оценивания для решения 1.

- Доказательство того, что $\angle BLN = \angle BCK$ — 1 балл.
- Доказательство того, что $\frac{BK}{\sin\phi} = \frac{BL}{\cos\phi}$ — 2 балла.
- Полное решение — 7 баллов.

Схема оценивания для решения 2.

- Доказательство того, что $\angle BNL = \angle BKT$ — 2 балла.
- Полное решение — 7 баллов.

5. Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$\left\lfloor \frac{a+b+c}{d} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b+c+d}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{c+d+a}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{d+a+b}{c} \right\rfloor,$$

где a, b, c, и d — положительные целые числа.

(Здесь $\lfloor x \rfloor$ обозначает наибольшее целое число, которое меньше или равно x. Например $\lfloor 2.5 \rfloor = 2$, $\lfloor 0 \rfloor = 0$.)

Ответ: 9.

Решение. Обозначим выражение как $f\ \ a,b,c,d$. Пусть $g\ \ a,b,c,d\ \ =$

$$= \frac{a+b+c}{d} + \frac{b+c+d}{a} + \frac{c+d+a}{b} + \frac{d+a+b}{c}.$$

Тогда по неравенству Коши-Буняковского,

$$g(a,b,c,d) = (a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) - 4 \geq 16 - 4 = 12. \tag{1}$$

Так как $\lfloor x \rfloor + 1 > x$ для любого x, имеем неравенства

$$12 \leq g(a,b,c,d) < f(a,b,c,d) + 4,$$

Что равносильно $f(a,b,c,d) \geq 9$. Выбрав $a = 10, b = c = d = 11$ убеждаемся, что 9 действительно является наименьшим значением.

Схема оценивания.

- Ответ с примером — 1 балл.
- Выведение (1) — 3 балла.
- Полное решение — 7 баллов.

6. Арман и Батыр играют в игру на клетчатой доске 1×2000. Они ходят по очереди, и каждый на своем ходу выбирает клетку и вписывает в нее S или же O. Начинает Арман. Первый игрок, на чьем ходу будет создан ряд из трех последовательных клеток, читающийся как SOS, выигрывает. Причем, если никто не выиграл после того, как все клетки были отмечены, объявляется ничья. Докажите, что Батыр может выиграть независимо от ходов Армана.

Решение 1. Назовем ряд $SXXS$, где X пустые клетки — *фатальным.* Заметим, что если какой-то игрок отметит любой буквой одну из пустых клеток фатального ряда, то другой игрок на следующем ходу сможет победить, создав SOS.

Выигрышная стратегия Батыра начинается с создания фатального ряда после четырех полуходов. Делает он это следующим образом. Какой бы ход ни совершил Арман на первом ходу, Батыр вносит букву S в ту клетку, которая хотя бы на 100 клеток удалена от отмеченной клетки, а также от концов доски. Допустим, что он отметил клетку под номером k, а Арман на это следующим ходом отмечает клетку под номером l. Теперь если Батыр может сразу же победить, создав SOS, то он это немедленно делает; в противном же случае на своем ходу он вносит букву S в клетку $k+3$, если $l < k$ и в клетку $k-3$ в ином случае. Таким образом, он добьется создания фатального ряда. Дальнейшая стратегия Батыра заключается в том, чтобы не давать Арману выиграть до тех пор, пока тот не отметит одну из клеток фатального ряда. Заметим, что исходя из четности первым отметить одну из этих двух клеток будет вынужден Арман. Причем, сразу после четвертого полухода Арман выиграть не может.

Назовем отрезком любую последовательность подряд идущих пустых клеток, окруженную отмеченными клетками. Рассмотрим ход Батыра. Если он может выиграть, создав SOS, то он делает это немедленно. В противном случае он рассматривает все отрезки. Сумма их длин будет нечетной, поэтому встретиться либо отрезок длины 1, либо отрезок нечетной длины не меньше 3.

Если встречается отрезок, состоящий только из одной клетки, то Батыр вносит в эту клетку букву O. Если же встречается отрезок длины не меньше трех, то Батыр выбирает ее центральную клетку и вносит в нее букву O. Можно заметить, что в обоих случаях не возникнет расположения, где Арман может мгновенно выиграть на следующем ходу. Поэтому, однажды Арман будет вынужден отметить клетку фатального ряда, а Батыр воспользуется этим и выиграет.

Решение 2. В альтернативном решении стратегия Батыра совпадает с основным решением вплоть до момента когда он создает фатальный ряд. Дальше на его ходах он выбирает случайную пустую клетку X, не лежащую в фатальном ряду. Такая существует, так как иначе кол-во пустых клеток будет четным, что противоречит тому, что Батыр ходит вторым.

Если обе соседней клетки X пустые, то он вносит в нее букву O. Если одна из соседних клеток содержит O, то он вносит в нее букву O. Если же одна из соседних клеток содержит S, а другая не содержит O, то тогда он вносит в нее букву S. Можно заметить, что во всех трех случаях — как и в предыдущем решении — не возникает расположения, где Арман может мгновенно выиграть на следующем ходу. Поэтому, однажды Арман будет вынужден отметить клетку фатального ряда, а Батыр воспользуется этим и выиграет.

Схема оценивания.

- Указание на то, что Батыр может выиграть, если Арман на предыдущем ходу отмечает пустую клетку фатального ряда — 1 балл.
- Доказательство того, что Батыр на своем втором ходу может построить фатальный ряд — 2 балла.

11 класс

1. (См. задачу 10.2.)

2. Пусть $\mathbb{R}$ — множество всех вещественных чисел. Определите все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что для любых $x, y \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$f(x)f(y) = f(x+y) + xy.$$

Ответ: $f(x) = x+1$ и $f(x) = -x+1$.

Решение. Обозначим равенство как $P(x,y)$. Так как решение $f \equiv 0$ не подходит, найдется такой x_1, что $f(x_1) \neq 0$. Тогда из $P(x_1, 0)$ получаем, что $f(0) = 1$. Выпишем два уравнения:

$$P(x,1)\colon f(x)f(1) = f(x+1) + x \quad (1)$$

$$P(x+1,-1)\colon f(x+1)f(-1) = f(x) - x - 1 \quad (2)$$

$P(1,-1) \Leftrightarrow f(1)f(-1) = 1 - 1 = 0$. Значит, либо $f(1) = 0$, либо $f(-1) = 0$.

Случай 1: $f(1) = 0$. Уравнение (1) станет $0 = f(x+1) + x$, откуда получаем решение $f(x) = -x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

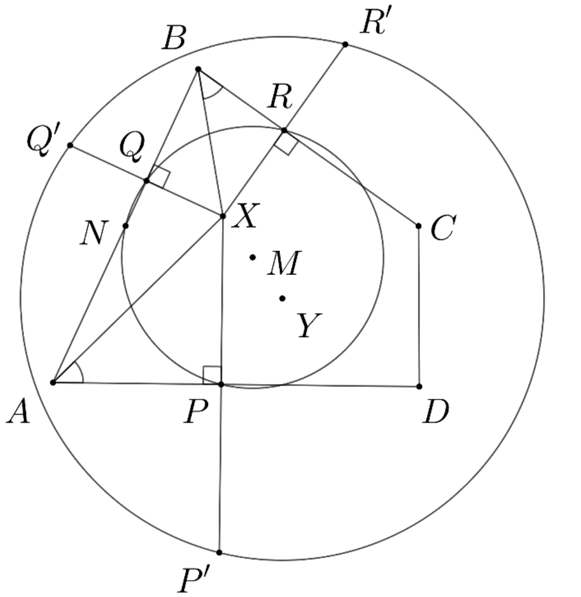
Случай 2: $f(-1) = 0$. Уравнение (2) станет $0 = f(x) - x - 1$, откуда получаем решение $f(x) = x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Схема оценивания.

- Доказательство, что $f(1)f(-1) = 0$ — 1 балл.
- Разбор случая $f(1) = 0$ — 2 балла.
- Разбор случая $f(-1) = 0$ — 2 балла.
- Полное решение — 7 баллов.
- За отсутсвие проверки штраф в 1 балл.

3. Существует выпуклый четырехугольник $ABCD$ и точка X внутри нее, такая что $\angle DAX = \angle CBX$. Докажите, что основания перпендикуляров из точки X на отрезки DA, AB, BC, а также середина отрезка AB лежат на одной окружности.

Решение. Пусть Y такая точка на плоскости, что $\angle YAB = \angle XAD$ и $\angle YBA = \angle XBC$. Пусть P, Q, R — основания перпендикуляров из точки X на отрезки DA, AB, BC, а также пусть P', Q', R' — точки симметричные X относительно прямых DA, AB, BC. Заметим, что $\angle P'AY = \angle P'AD + \angle YAD = \angle XAD + \angle YAD = \angle YAB + \angle YAD = \angle DAB$, а также $\angle R'AY = \angle R'AB + \angle BAY = \angle XAB + \angle BAY = \angle DAB$.



Заметим, что треугольники $\Delta P'AY$ и $\Delta R'AY$, равны по одному углу $\angle R'AY = \angle P'AY$, а также по двум сторонам $AY = AY$ и $R'A = XA = P'A$. Поэтому $YR' = YP'$. Аналогично, $YR' = YQ'$.

Таким образом окружность $P'Q'R'$ имеет центр в точке Y, тогда исходя из гомотетии в точке X с коэффициентом $\frac{1}{2}$, окружность PQR имеет центр в середине отрезка XY, назовем его M. Пусть N — это середина отрезка AB, можно заметить, что оно также является основанием перпендикуляра, опущенного из точки Y на отрезок AB. Давайте докажем, что $MN = MQ$. Опустим из точки M перпендикуляр на отрезок AB, основание которого назовем T, тогда $TQ/TN = MX/MY = 1$. Поэтому $TQ = TN$, а также MT перпендикулярно QN, из чего следует, что $MN = MQ$, что также равно $MN = MQ = MP = MR$. Тогда четыре точки N, P, Q, R лежат на одной окружности, что и требовалось доказать.

Схема оценивания.

- Доказательство того, что $YR' = YQ'$ или того, что $YP' = YQ'$ — 2 балла.
- Доказательство того, что $MP = MQ = MR$ — 3 балла.
- Доказательство того, что $MQ = MN$ — 2 балла.
- Баллы за первые два пункта не суммируются.

4. Существует ли возрастающая последовательность натуральных чисел $a_0 < a_1 < \cdots < a_{a_1}$, такая, что разность любых двух членов последовательности — точный квадрат.

Ответ: нет.

Решение. Пойдя от обратного, допустим, что такая последовательность существует. Пусть $a_i - a_0 = x_i^2$, а также $a_i - a_1 = y_i^2$ для всех $2 \le i \le a_1$ таким образом, что x_i и y_i неотрицательные. Заметим, что из $a_0 < a_1$ следует, что $x_i^2 > y_i^2$, то есть $x_i \ge y_i + 1$. Тогда,

$$a_1 - a_0 = (a_i - a_0) - (a_i - a_1) = x_i^2 - y_i^2 \ge (y_i + 1)^2 - y_i^2 = 2y_i + 1,$$

для всех $2 \le i \le a_1$. Рассмотрим максимальное число y_k среди $y_2, y_3, \dots, y_{a_1}$, так как y_i-ые различные, и их количество $a_1 - 1$, y_k будет не меньше $a_1 - 1$. Таким образом $a_1 - 1 \ge a_1 - a_0 \ge 2y_k + 1 \ge 2a_1 - 1$, что не может быть верным для натурального a_1.

Схема оценивания.

- Доказательство, что $a_1 - a_0 = (a_i - a_0) - (a_i - a_1) = x_i^2 - y_i^2$, для различных x_i, y_i — 3 балла.
- Полное решение — 7 баллов.

5. Пусть n, m — целые числа большие 1, и $a_1, a_2, \dots, a_m$ — натуральные числа меньшие n^m. Докажите, что существуют натуральные числа $b_1, b_2, \dots, b_m \le n$ такие, что

$$\text{НОД}(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_m + b_m) < n.$$

Решение. Без ограничения общности, a_1 — наименьшее число среди $\{a_1, \dots, a_m\}$. Рассмотрим два случая, когда $a_1 \ge n^m - 1$ и $a_1 \le n^m - 2$.

Случай 1: Если $a_1 \ge n^m - 1$, то либо все $a_i = n^m - 1$, либо существуют такие i и j, что $a_i = n^m - 1$ и $a_j = n^m$.

В случае когда все $a_i = n^m - 1$, возьмем $b_1 = 1$ и $b_2 = 2$. Тогда получим

$$\text{НОД}(a_1 + b_1, \dots, a_m + b_m) \le \text{НОД}(a_1 + b_1, a_2 + b_2) = \text{НОД}(n^m, n^m + 1) = 1 < n$$

— что и требовалось доказать. В другом случае возьмем $b_i = b_j = 1$. Тогда

$$\text{НОД}(a_1 + b_1, \dots, a_m + b_m) \le \text{НОД}(a_i + b_i, a_j + b_j) = \text{НОД}(n^m, n^m + 1) = 1 < n$$

— что и требовалось доказать.

Случай 2: $a_1 \le n^m - 2$. Пусть от противного, не существует такого набора $(b_1, \dots, b_m)$, что выполняются условия задачи. В таком случае, $\text{НОД}(a_1 + b_1, \dots, a_m + b_m) \ge n$.

Утверждение 1. Для двух различных наборов $(b_1, \dots, b_n)$, значения $\text{НОД}(a_1 + b_1, \dots, a_m + b_m)$ будут различными.

Доказательство утверждения 1. Допустим, что нет. Тогда есть такие $(a_i + b_i)$ и $(a_i + b_i')$, которые делятся на НОД $\geq n$ с различными b_i и b_i'. В таком случае $(a_i + b_i) - (a_i + b_i')$ также должно делиться на НОД $\geq n$. То есть, должно быть $(b_i - b_i') \geq n$, что невозможно, так как числа b_i и $b_i' \leq n$ — противоречие. Утверждение доказано. Из $a_1 \leq n^m - 2$ и $b_1 \leq n$ следует, что

$$n \leq (a_1 + b_1, \dots, a_m + b_m) \leq a_1 + b_1 \leq n^m + n - 2.$$

Значит, количество вариантов НОД$(a_1 + b_1, \dots, a_m + b_m)$ равно

$$n^m + n - 2 \ - (n - 1) = n^m - 1.$$

Но количество наборов $(b_1, \dots, b_m)$ будет n^m. Тогда по принципу Дирихле существует два различных набора $(b_1, \dots, b_m)$ и $(b_1', \dots, b_m')$ с одинаковым значением НОД$(a_1 + b_1, \dots, a_m + b_m)$.

Но в силу утверждения 1, это невозможно.

Схема оценивания.

- Доказательство случая $a_1 \geq n^m - 1$ — 2 балла.
- Доказательство утверждения 1 — 2 балла.
- Нахождение количества вариантов значения НОД$(a_1 + b_1, \dots, a_m + b_m)$ для случая $a_1 \leq n^m - 2$ — 2 балла.
- Полное доказательство случая $a_1 \leq n^m - 2$ — 5 баллов.
- Полное решение — 7 баллов.

6. (См. задачу 10.6.)