# Математика пәні бойынша
# Beyond Olympiad #1-дің
# шарттары мен шешімдері

22-23 маусым 2021

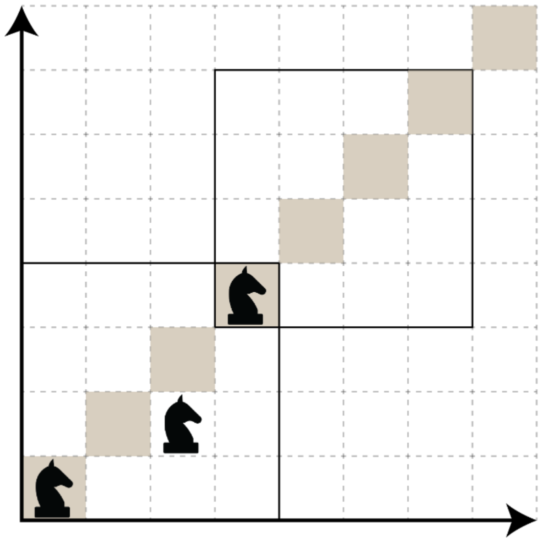
# Шарттар мен шешімдер

## 9 сынып

1. $2021 \times 2021$ тақтада Тамирлан мен Дидар келесі ойынды кезекпен жүріп ойнайды. Ойынның басында төменгі сол жақ бұрышта ат (шахмат фигурасы) тұр. Ойыншы өз жүрісінде атты оңға және жоғарыға жетелейтін ат жүрісімен қозғалтуға міндетті. Жүріс жасай алмайтын адам жеңіледі. Егер ойынды Тамирлан бастаса, қарсыласының жүрісіне қарамастан қай ойыншы өзінің жеңісіне кепілдік бере алады?

**Жауабы:** Дидар.

**Шешімі.** Ат жүрісінің тек 2 түрі бар:
1 ұяшық оңға + 2 ұяшық жоғары — I-тип;
2 ұяшық оңға + 1 ұяшық жоғары — II-тип.



Дидар үшін келесі стратегияны ұсынамыз. Дидар Тамирланның әр жүрісінен кейін басқа типті жүріс жасайды. Сонда Дидар әрқашан атты басты диагональға, алдыңғы позициядан 3 ұяшыққа жоғары және оңға қайтара алады екен. Осылайша, Дидардың жүрісінен кейін ат әрдайым диагональдағы нөмірін 3-ке бөлгенде 1 қалдық қалдыратын ұяшықта қалып отырады. Сонымен, соңында ат $2020 \times 2020$ ұяшығына түседі. Тамирлан бұл ұяшықтан қозғала алмайтыны анық. Сондықтан, Дидар бұл ойында осы стратегия арқылы жеңіске жете алады.

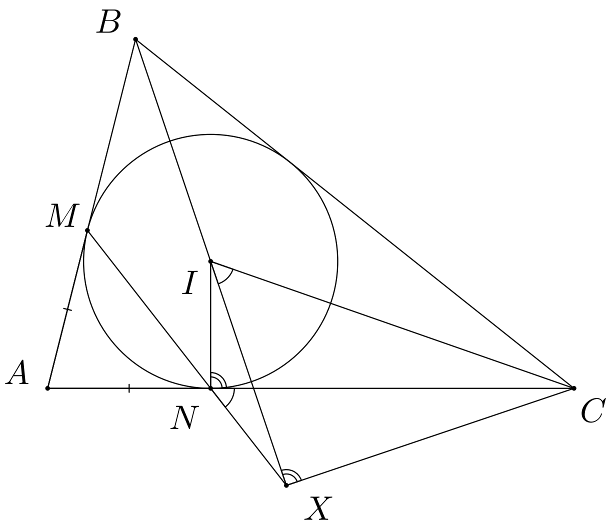
**Бағалау кестесі.**

- Атты басты диагональға әрдайым қайтаруға болады деген тұжырым үшін - 4 ұпай.
- 2021-ті 3-ке бөлу арқылы жауап алуға тырысқаны үшін - 1 балл.
- Дидар $2020 \times 2020$ ұяшығына атты қоя алатындығын айтқаны үшін - 1 балл.
- Толық шешім - 7 балл.

2. Центрі $I$-де болатын шеңбер $ABC$ үшбұрышына іштей сызылған және $AB$ мен $AC$ қабырғаларын сәйкесінше $M$ мен $N$ нүктелерінде жанайды. $MN$ және $BI$ түзулері $X$ нүктесінде қиылысады. $\angle CXB = 90^\circ$ екенін дәлелдеңіз.

**Шешімі.** Үшбұрыштың $\angle A$ мен $\angle B$ бұрыштары сәйкесінше $2\alpha$ мен $2\beta$ болсын. $BI$ мен $CI$ $\angle B$ мен $\angle C$ бұрыштарының биссектрисалары. Онда, $\angle ABI = \angle IBC = 2\beta$

және $\angle ICB = \angle ICA = 90° - \alpha - \beta$.




$\Delta AMN$ қарастырайық. $AM$ и $AN$ — іштей сызылған шеңбергң жанамалар, сондықтан, $AM = AN$. Яғни, $\Delta AMN$ теңбүйірлі. Онда $\angle AMN = \angle ANM = \frac{180° - \angle MAN}{2} = \frac{180° - \alpha}{2}$.

$\angle XIC$— $\Delta BIC$ үшбұрышының сыртқы бұрышы, сондықтан да: $\angle XIC = \angle IBC + \angle ICB = \beta + (90° - \alpha - \beta) = 90° - \alpha$

$\angle ANM = \angle XNC = XIC = 90° - \alpha$ болғандықтан, $NXIC$ төртбұрышы — іштей сызылған. Онда $\angle CXI = \angle CNI$. Жанама мен жанау нүктесіне жүргізілген радиус арасындағы бұрыш тік болғандықтан, $IN$ мен $AC$ өзара перпендикуляр. Яғни, $\angle CNI = \angle CXI = CXB = 90°$.

**Бағалау кестесі.**
- $NXIC$ төртбұрышының іштей сызылғанын дәлелдеу — 5 балл.
- Толық шешім — 7 балл.

3. Егер натурал $N$-ның жай бөлгіштерге жіктелуі үшін $N = p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_k^{x_k}$ келесі

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = p_1 + p_2 + \dots + p_k$$

теңдеуі орындалса, оны *ғажайып* деп атайық. 2021-ден кіші барлық *ғажайып* сандарды табыңыз.

**Жауабы:** 4, 27, 48, 72, 108, 162, 320, 800, 1792, 2000.

**Шешімі.** Әуелі, 2021-дан кіші ғажайып сан үшін $k \leq 3$ екендігін дәлелдейік. Олай болмаса, ол кем дегенде 4 түрлі жай санға бөлінеді. Онда ол жай сандар үшін $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 \geq 2 + 3 + 5 + 7 \geq 17$. Алайда, сан ғажайып болғандықтан,

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 \geq 17 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N > 2^{x_1} \cdot 2^{x_2} \cdot 2^{x_3} \cdot 2^{x_4} = 2^{x_1 + x_2 + x_3 + x_4} = 2^{17} > 2021,$$

Қарама-қайшылық. Сондықтан келесі 3 жағдайды қарастырсақ жеткілікті.

***Жағдай 1****:* $k = 3$. Жалпылықты жоғалтпай $p_1 < p_2 < p_3$ делік. Онда

$$N = p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdot p_3^{x_3} > 2^{x_1} \cdot 2^{x_2} \cdot 4^{x_3} = 2^{x_1 + x_2 + 2x_3} = 2^{p_1 + p_2 + p_3 + x_3} =$$

$$= 2^{10+x_3} \geq 2^{2+3+5+x_3} = 2^{10+x_3} \geq 2^{11} > 2021.$$

Қайтадан қарама-қайшылық. Яғни $k = 3$ үшін ешқандай шешім жоқ.

***Жағдай 2****:* $k = 2$. Алдыңғы жағдайдағы сияқты, $p_1 + p_2 = x_1 + x_2 \leq 10$ деген қорытындыға келеміз. Яғни $p_1$, $p_2$ тек 2, 3, 5, 7 сандарының бірі ғана бола алады. Сондықтан біз барлық мүмкін жағдайларды қарастырамыз. Олар: $(2,3), (2,5), (2,7), (3,5), (3,7)$.

*Жағдай 2.1* : $x_1 + x_2 = 2 + 3 = 5$. Онда келесі ғажайып сандарды аламыз $N = 3^4 \cdot 2, 3^3 \cdot 2^2, 3^2 \cdot 2^3, 3 \cdot 2^4$.

*Жағдай 2.2* : $x_1 + x_2 = 2 + 5 = 7$. $5^4 \cdot 2^3 > 2021$, бұл жағдайда ғажайып сандарды тек $N = 5^3 \cdot 2^4, 5^2 \cdot 2^5, 5 \cdot 2^6$ құрайды.

*Жағдай 2.3* : $x_1 + x_2 = 2 + 7 = 9$. 2021-дан кіші тек $N = 2^8 \cdot 7$ шешімі бар.

*Жағдай 2.4* : $x_1 + x_2 = 3 + 5 = 8$. $3^7 \cdot 5 > 2021$, болғандықтан, бұл жағдайды ешқанддай шешім жоқ.

*Жағдай 2.5:* $x_1 + x_2 = 3 + 7 = 10$. $3^9 \cdot 7 > 2021$ болғандықтан, бұл жағдайды ешқанддай шешім жоқ.

***Жағдай 3****:* $k = 1$. Бұл жағдайда тек $N = 2^2, 3^3$ ғана ғажайып сан болады.

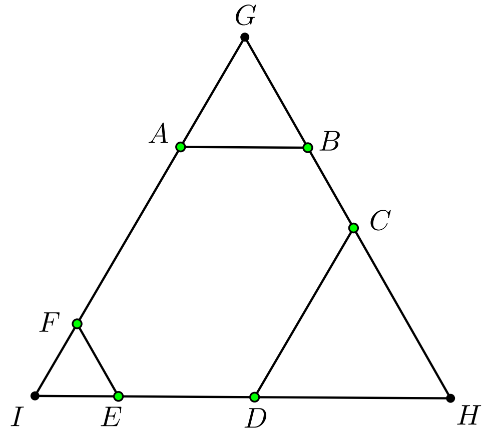
Барлық жағдайларды қарастырып, келесі сандар ғажайып екендігіне көз жеткіздік 4, 27, 48, 72, 108, 162, 320, 800, 1792, 2000.

**Бағалау кестесі.**

- $k \leq 3$ екендігінің дәлелі — 3 балл.
- Әр толықтай талданған жағдай (1/2/3) үшін— 1 балл.
- Егер жауап ішінде кейбір ғажайып сандар болмаса немесе артық дұрыс емес сандар болса, олардың санына байланысты 1-2 балл шегеріледі.

4. $ABCDEF$ алтыбұрышында барлық бұрыштар тең. Келесі теңдікті дәлелдеңіз:

$$AB - DE = EF - BC = CD - FA.$$




**Шешімі.** Кез-келген алтыбұрыштағы бұрыштардың қосындысы $720°$ болғандықтан, $ABCDEF$-тің әр бұрышы $60°$ болады. $FA$ түзуі $BC$ және $DE$-мен сәйкесінше $G$ және $I$ нүктелерінде қиылыссын. $BC$ түзуі $DE$ түзуімен $H$ нүктесінде қиылыссын. Сонда $ABG$, $CDH$, $EFI$ және $GHI$

қабырғалары a, b, c және s болатын тең қабырғалы үшбұрыштар. Сонда $AB - ED = a - (s - b - c) = a + b + c - s$, сондай-ақ $EF - BC$ және $CD - FA$.

5. $R$ және $S$ сандарын келесідей анықтаймыз

$$R = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{223}{224}, \qquad S = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{224}{225}.$$

$R < \frac{1}{15} < S$ екенін дәлелдеңіз.

**Шешімі.** $R$ көбейтіндісіндегі әрбір бөлшек $S$-дегі сәйкес бөлшектен аз екенін байқаймыз. Мысалы, $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}, \frac{3}{4} < \frac{4}{5}$ және т.б. Сондықтан $R < S$. Ал $R \cdot S = \frac{1}{225}$ болғандықтан, $R < \frac{1}{15} < S$. Олай болмаған жағдайда $R \cdot S$ саны $\frac{1}{15}$ ден не аз, не артық болады.

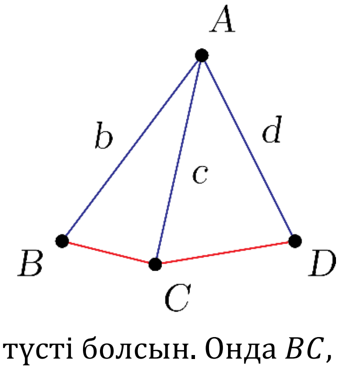
**Бағалау кестесі.**
- $R < S$ екендігін дәлелдеу — 3 балл.
- Толық шешім — 7 балл.

6. Графляндия елінде 600 қала бар және әрбір екі қала арасында жеке бір жол салынған. Әрбір жолды екі түстің біреуімен белгіледі. Үш қаланың жиынын үшбұрыш деп атайық. Графляндияда төбелері әр түрлі 300 қала болатын және оларға кіретін барлық 300 жол бір түсті болатындай 100 үшбұрыш бар екенін дәлелдеңіз.

**Решение.** Есеп шартын төбелері Графляндиядағы қалалар, ал оларды жалғайтын қабырғалары елдегі жолдар болатын граф ретінде қарастырайық. Үш қабырғасы да бір түсті үшбұрышты біртүсті үшбұрышты деп атайық. Әуелі, келесі лемманы дәлелдейік.

*Лемма:* Кез-келген 6 төбеден тұратын қабырғалары екі түске боялған толық графта ең кем дегенде 1 үшбұрыш кездеседі.

*Дәлелденуі:* Лемма дұрыс емес делік. Біз граф қабырғаларын көк және қызыл түстерге бояймыз. Онда, бір А төбесін және одан шығатын 5 қабырғаны қарастырайық. Дирихле принципі бойынша, кем дегенде 3-еуі бір түсті болады. Ол қабырғаларды $b$, $c$, $d$, ал оларға сәйкес төбелерді $B, C, D$ деп белгілейміз.




Жалпылықты жоғалтпай, $b$, $c$ және $d$ қабырғалары қызыл түсті болсын. Онда $BC$, $CD$ және $BD$ қабырғалары көк түсті, себебі олай болмаса бізде қызыл түсті үшбұрыш болушы еді. Алайыда, бұл жағдайда $BC$, $CD$ және $BD$ қабырғалары көк түсті үшбұрышты құрайды. Қарама-қайшылық, яғни лемма дәлелденді.

Леммадан бұл 600 төбесі бар графта кез келген 6 төбе арасында бір үшбұрыш табылатындығын қорытындылауға болады. Енді, әр қадамда кез келген 6 төбені алып, олардың ішінде табылатын бір түсті үшбұрыштардың төбелерін жояйық. Осындай қадамды жалпы тек 199 рет қайталауға болады. Бұл дегеніміз осы 199 қадамда бір-бірімен ортақ төбелері жоқ 199 үшбұрышты жойдық. Онда, осы 199 үшбұрыштардың ішінде кем дегенде 100 бірдей түсті үшбұрышты жойдық, яғни графта ең басында 100 бірдей түсті үшбұрыштар табылады.

**Бағалау кестесі.**

- Лемманың дәлелденуі және қолдануы — 3 балл.
- Графта 199 бір түсті бір-бірімен ортақ төбелері жоқ үшбұрыштардың бар екендігінің дәлелденуі — 3 балл.
- Толық шешім — 7 балл.

## 10 сынып

1. (9.3 қараңыз.)

2. 2021 бірнеше натурал сандардың қосындысы ретінде жазылған. Осы қосылғыштардың көбейтіндісі ең көп дегенде қаншаға тең бола алады?

   **Жауабы:** $2 \cdot 3^{673}$.

   **Шешімі.** 2021 санын қосылғыштарға тек жіктеу саны шекті болғандықтан, ең үлкен көбейтіндіні табуға болады. Ол көбейтіндіні $X$ деп белгілейік және сол қосылғыштарды қарастырайық. Олардың арасында 4-тен үлкен сандар кездеспейді, себебі егер қосылағыштар арасында $a > 4$ болса, біз тура сол жіктелуді алып, тек $a$-ның орнына 2 и $a - 2$ сандарын алсақ, онда көбейтінді үлкейеді, себебі $a > 4$ болғандықтан $2(a-2) > a$. Бұл $X$ максималдығына қарама қайшы. Ал жіктелуде 4 болса, онда оны екі 2-ге алмастыруға болады, Себебі бұл жағдайда қосынды да көбейтінді де өзгермейді. Онымен қоса 1 саны көбейткіштердің арасында жоқ, себебі оны басқа қосылғышпен біріктірсек көбейтінді үлкейеді, қарама-қайшылық.

   Яғни, біз тек 2 және 3 сандарынан тұратын қосылғыштарға жіктелуін алдық. Бұл жіктелуде 2-лердің саны үштен аз, себебі егер бізде үш 2 кездессе, оларды екі 3-пен алмастыру арқылы көбейтіндіні үлкейтуге болушы еді ($2 \cdot 2 \cdot 2 < 3 \cdot 3$). Сондықтан ең үлкен көбейтіндіні беретін жіктелуде 2-лердің саны екіден көп емес.

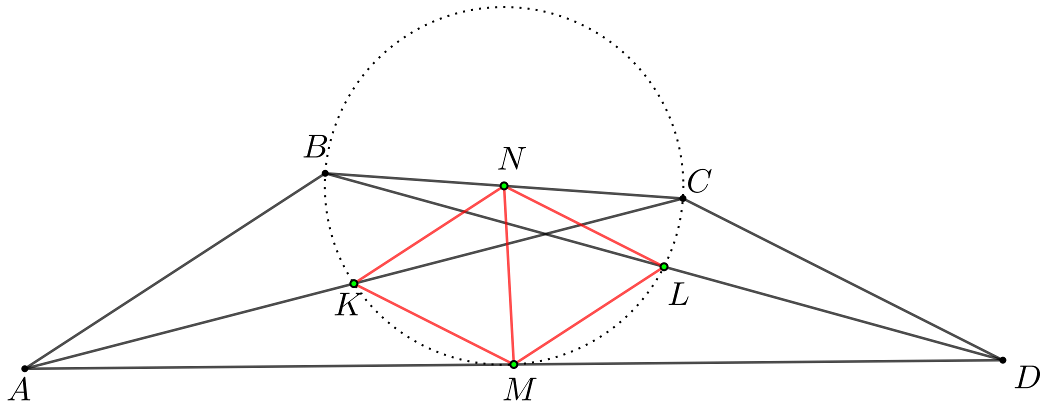
   3-тің модулі арқылы қараған кезде тек қана бір 2 болуы мүмкін екендігіне көз жеткіземіз. Бұл жіктеу $2 \cdot 3^{673}$ жауабын береді.

**Бағалау кестесі.**

- Ең үлкен көбейтіндіні беретін жіктелуде барлық сандар 4-тен көп еместігінің дәлелі — 3 балл.
- Ең үлкен көбейтіндіні беретін жіктелуде 2-лердің саны үштен аз екендігінің дәлелі — 2 балл.
- Толық шешім — 7 балл.

3. $ABCD$ төртбұрышында $AB$, $BC$ және $CD$ қабырғалары тең, $M$ — $AD$ қабырғасының орта нүктесі. $\angle BMC = 90°$ екені белгілі. $ABCD$ төртбұрышының диагональдары арасындағы бұрышты табыңыз.

**Жауабы:** 30°.




**Шешімі.** $BC$ қабырғасының орта нүктесі $N$ болсын; $K$, $L$ - диагональдардың ортаңғы нүктелері. $KN$, $NL$, $LM$, $MK$ — $ABC$, $BCD$, $CDA$, $DAB$ үшбұрыштарының орта сызықтары және барлығы $\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD$-ге тең. $AB = BC = CD$ және $BMC = 90°$ болғандықтан, бізде $BN = KN = NL = NC = NM$ теңдіктері бар. Сондықтан, $B$, $K$, $L$, $C$, $M$ нүктелері диаметрі $BC$ және центрі $N$ болатын бір шеңберде жатады. Және де осы теңдіктерден $KNM$ және $NLM$ үшбұрыштары тең қабырғалы екенін көреміз.

Төртбұрыштың диагональдары арасындағы бұрыш $CL$ және $BK$ доғаларының қосындысының жартысына тең,

$$\frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{CL} + \overset{\frown}{BK}\right) = \frac{1}{2}\left(180° - \overset{\frown}{LM} - \overset{\frown}{MK}\right) = \frac{1}{2}(180° - 60° - 60°) = 30°.$$

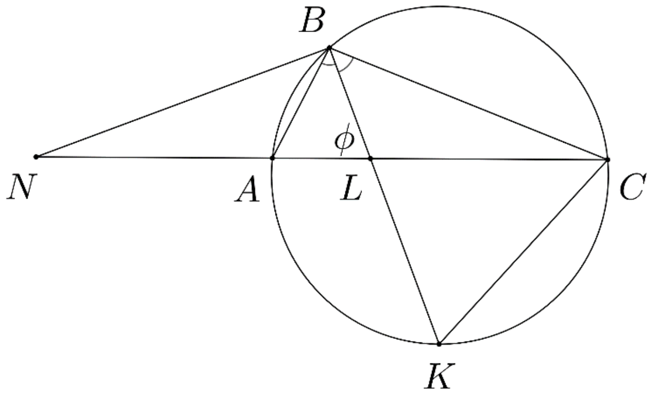
**Бағалау кестесі.**

- $K$ және $L$ нүктелерін қарастыру және $B$, $K$, $M$, $L$, $C$ бір шеңберде жатуының дәлелденуі — 4 балл.
- $\Delta NKM$ және $\Delta NLM$ үшбұрыштарының тең қабырғалы екенінің дәлелденуі — 2 балл.
- Толық шешім — 7 балл.

4. $ABC$ үшбұрышының $BL$ биссектрисасының созындысы сырттай сызылған шеңберді $K$ нүктесінде қияды. $B$ бұрышының сыртқы биссектрисасы $CA$ кесіндісінің $A$-дан ары созындысын $N$ нүктесінде қисын. $BK = BN$ босла, $LN$ кесіндісі $ABC$ үшбұрышына сырттай сызылған шеңбердің диаметріне тең екенін дәлелдеңіз.

**1-шешім.** $\angle BLN = \phi$ деп алайық. Онда $\angle BCK = \angle BCA + \angle ACK = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AK}\right) = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CK}\right) = \phi$. $\angle LBN = 90°$ екенін байқаймыз (ішкі және сыртқы биссектрисалар арасындағы бұрыш). Онда $BK = BN = BL \tan\phi$ және

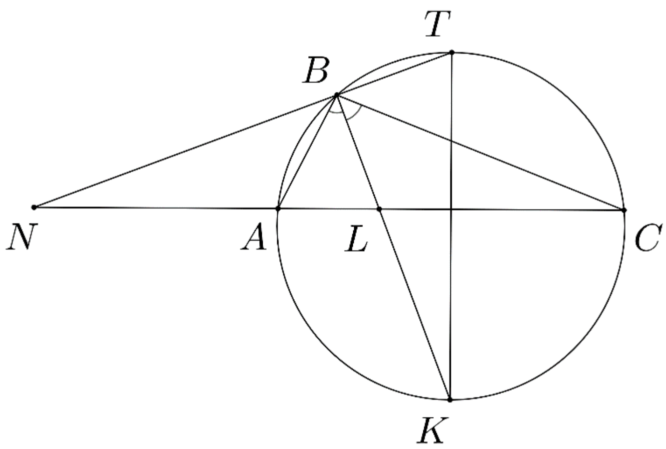
$$\frac{BK}{\sin\phi} = \frac{BL}{\cos\phi}.$$




$\Delta LBN$ үшбұрышын қарастырсақ, теңдіктің оң жағы $NL$-ге тең екенін байқаймыз. Ал сол жағы, синустар теоремасына сәйкес, $\Delta BCK$-на сырттай сызылған шеңбер диаметріне тең. Есеп дәлелденді.

**2-шешім.** $T$ — $\overset{\frown}{ABC}$ доғасының ортасы болсын. Онда $TK$ — шеңбердің диаметри, $\angle TBK = 90°$ және $T$ $BN$ түзуінде жатады. Келесі теңдікті байқамыз:

$$\angle BNL = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{TC} - \overset{\frown}{AB}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AT} - \overset{\frown}{AB}\right) = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BT} = \angle BKT.$$




Демек, $NBL$ және $KBT$ үшбұрыштары катет пен сүйір бұрышы бойынша тең, онда $LN = TK$, есеп дәлелденді.

**1-шешімнің бағалау кестесі.**

- $\angle BLN = \angle BCK$ дәлелденуі — 1 балл.
- $\frac{BK}{\sin\phi} = \frac{BL}{\cos\phi}$ дәлелденуі — 2 балл.
- Толық шешім — 7 балл.

**2-шешімнің бағалау кестесі.**

- $\angle BNL = \angle BKT$ дәлелденуі — 2 балл.

5. Өрнектің ең кіші мүмкін болатын мәнін табыңыз

$$\left\lfloor\frac{a+b+c}{d}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{b+c+d}{a}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{c+d+a}{b}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{d+a+b}{c}\right\rfloor,$$

мұндағы $a$, $b$, $c$ және $d$ — бүтін сандар.

(Мұнда $\lfloor x\rfloor$ — $x$-тен кем немесе оған тең ең үлкен бүтін санды білдіреді. Мысалы $\lfloor 2.5\rfloor = 2, \lfloor -0\rfloor = 0.$)

**Жауабы:** 9.

**Решение.** Өрнекті $f(a,b,c,d)$ деп белгілейік. Ал $g(a,b,c,d) =$

$$= \frac{a+b+c}{d}+\frac{b+c+d}{a}+\frac{c+d+a}{b}+\frac{d+a+b}{c}.$$

Онда Коши-Буняковский теңсіздігі бойынша,

$$g(a,b,c,d) = (a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)-4 \geq 16-4 = 12. \qquad (1)$$

Кез келген $x$ үшін $\lfloor x\rfloor + 1 > x$ болғандықтан, келесі теңсіздіктер орындалады

$$12 \leq g(a,b,c,d) < f(a,b,c,d) + 4,$$

Ал бұл теңсіздік $f(a,b,c,d) \geq 9$ теңсіздігімен бірдей. $a = 10, b = c = d = 11$ деп таңдап, 9 шынымен де ең кіші мән екеніне көз жеткізе аламыз.

**Бағалау кестесі.**
- Мысалы бар жауап — 1 балл.
- (1) өрнегін алу — 3 балл.
- Толық шешім — 7 балл.

6. Арман мен Батыр $1 \times 2000$ тақтада ойын ойнап отыр. Олар кезекпен қадам жасайды, әр қадамда ойыншы бір торды таңдап, оған $S$ немесе $O$ әрпін жазады. Арман бірінші болып жүреді. Кімнің жүрісінен кейін $SOS$ деп оқылатын қатарынан тұрған 3 шаршы алғашқы рет пайда болса, сол жеңіске жетеді. Барлық тақта толтырылғаннан кейін ешкім ұтпаса, тең ойын жарияланады. Арман қалай жүрсе де, Батыр жеңе алатынын дәлелдеңіз.

**1-шешім.** $X$ – бос шаршы болатын, $SXXS$ қатарын *маңызды* деп атайық. Егер ойыншы осындай маңызды қатардағы бос шаршылардың біреуіне қандай да бір әріп жазса, екінші ойыншы келесі жүрісте $SOS$-ты құрып жеңе алады. Батырдың ұтымды стратегиясы 4 жарты-жүрістен кейін маңызды қатар құрудан басталады. Оны келесідей жасайды. Арманның алғашқы қадамы қандай болса да, Батыр $S$ әрпін белгіленген ұяшықтан және тақтаның шетінен кемінде 100 ұяшыққа алыс енгізеді. Бұл шаршының нөмірі $k$ делік, ал Арман келесі қадамымен нөмірі $l$ шаршыға әріп жазсын. Енді егер Батыр $SOS$ құрумен бірден жеңе алса, онда ол оны дереу жасайды; олай болмаған жағдайда, ол өзінің жүрісінде $S$ әрпін $l < k$ болса, $k + 3$ ұяшығына және басқа жағдайда $k - 3$ ұяшығына жазады. Осылайша ол маңызды қатарды құрады. Батырдың одан кейінгі стратегиясы маңызды қатардың бір шаршысы белгіленбегенінше Арманның ұтуын болдыртпау болып табылады. Жұптылыққа байланысты, Арман осы екі ұяшықтың біреуін бірінші болып белгілеуге мәжбүр болады. Сонымен қатар, төртінші жарты-жүрістен кейін Арман жеңіске жете алмайды.

Белгіленген шаршылармен шектелген бос шаршылардан тұратын қатар *кесінді* деп аталсын. Батырдың жүрісін қарастырайық. Оның жеңіске жететін мүмкіндігі болмаса, ол барлық кесінділерді қарастырады. Олардың ұзындықтарының қосындысы тақ болғандықтан, ұзындығы не 1, не 3-тен кем емес болатыны кездеседі.

1 ғана шаршыдан тұратын кесінді бар болса, Батыр оған $O$-ны жазады. 3-тен кем емес шаршыдан тұратыны кездессе, Батыр оның ортаңғы шаршысын таңдап, оған $O$-ны жазады. Екі жағдайда да Арман келесі қадамда жеңіске жететіндей позиция пайда болмайтынын байқаймыз. Сондықтан да, Арман маңызды қатардың бос шаршысын белгілеуге мәжбүр болады да, Батыр жеңіске жетеді.

**2-шешім.** Бұл шешім негізгісімен Батырдың маңызды қатарды құруына дейін бірдей. Одан кейін ол маңызды қатарға жатпайтын кез келген бос $X$ шаршысын таңдайды. Ондай шаршы табылады, әйтпесе бос шаршылар саны жұп болады, бірақ ол Батырдың екінші жүруіне байланысты мүмкін емес.

Егер $X$-тің көршілес шаршыларының екеуі де бос болса, ол оған $O$-ны жазады. Егер біреуінде $O$ болса, қайта $O$-ны жазады. Егер біреуінде $S$ болып, екіншісінде $O$ болмаса, оған $S$-ты жазады. Үш жағдайда да Арман жеңетін позиция пайда болмайды. Сондықтан да, Арман маңызды қатардың бос шаршысын белгілеуге мәжбүр болатын уақыт келеді.

**Бағалау кестесі.**

- Арман алдыңғы қадамында маңызды қатардың бос шаршысын толтырса, Батыр жеңіске жететіне нұсқау — 2 балл.
- Батырдың маңызды қатарды өзінің екінші жүрісінде құра алатынын дәлелдеу — 1 балл.

## 11 сынып

1. (10.2 қараңыз.)

2. Нақты сандар жиынын $\mathbb{R}$ деп белгілейік. Кез келген $x, y \in \mathbb{R}$ үшін

$$f(x)f(y) = f(x+y) + xy$$

орындалатындай барлық $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функцияларын табыңыз.

**Жауабы:** $f(x) = x + 1$ және $f(x) = -x + 1$.

**Шешімі.** Берілген өрнекті $P(x, y)$ етіп белгілейік. $f \equiv 0$ шешімі келмегендіктен, $f(x_1) \neq 0$ орындалатындай $x_1$ табылады. Онда $P(x_1, 0)$ қойғанда, $f(0) = 1$ аламыз. Келесі екі өрнекті жазып шығайық:

$$P(x,1): f(x)f(1) = f(x+1) + x \qquad (1)$$

$$P(x+1,-1): f(x+1)f(-1) = f(x) - x - 1 \qquad (2)$$

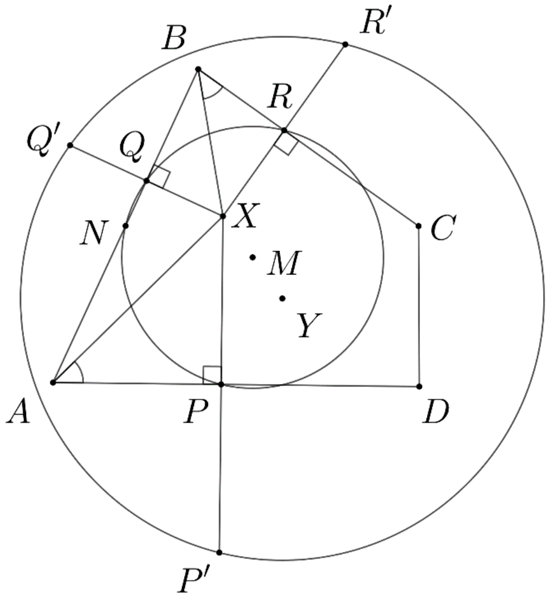
$P(1, -1) \Leftrightarrow f(1)f(-1) = 1 - 1 = 0$. Онда $f(1) = 0$ немесе $f(-1) = 0$.

*1-жағдай:* $f(1) = 0$. (1) өрнегі келесідей өзгереді: $0 = f(x+1) + x$, осыдан $f(x) = -x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ шешімін аламыз.

*2-жағдай:* $f(-1) = 0$. (2) өрнегі келесідей өзгереді: $0 = f(x) - x - 1$, осыдан $f(x) = x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ шешімін аламыз.

**Бағалау кестесі.**
- $f(1)f(-1) = 0$ дәлелдеу— 1 балл.
- $f(1) = 0$ жағдайын қарастыру — 2 балл.
- $f(-1) = 0$ жағдайын қарастыру — 2 балл.
- Толық шешім — 7 балл.
- Есептің шешімдері тексерілмеген жағдайда 1 балл алынады.

3. $ABCD$ дөңіс төртбұрышы мен $\angle DAX = \angle CBX$ орындалатындай ішінде $X$ нүктесі бар. $X$ нүктесінен $DA, AB, BC$ кесінділеріне түсірілген перпендикулярлар және $AB$ кесіндiiсінің ортасы бір шеңбер бойында жататынын дәлелдеңіз.




**Шешімі.** $\angle YAB = \angle XAD$ және $\angle YBA = \angle XBC$ орындалатындай жазықтықта $Y$ нүктесі белгіленсін. $P, Q, R$ —$X$ нүктесінен түсірілген перпендикулярлардың табаны, $P', Q', R'$ — $DA, AB, BC$ түзулеріне қатысты $X$-ке симметриялы нүктелер болсын. $\angle P'AY = \angle P'AD + \angle YAD = \angle XAD + \angle YAD = \angle YAB + \angle YAD = \angle DAB$ және $\angle R'AY = \angle R'AB + \angle BAY = \angle XAB + \angle BAY = \angle DAB$ екенін байқаймыз.

$\Delta P'AY$ және $\Delta R'AY$ үшбұрыштары бір бұрышы $\angle R'AY = \angle P'AY$ мен екі қабырғасымен $AY = AY$ мен $R'A = XA = P'A$ тең. Сондықтан, $YR' = YP'$. Дәл солай, $YR' = YQ'$.

Осылайша, $P'Q'R'$ шеңберінің центі $Y$ нүктесінде орналасқан. Онда $X$ нүктесіндегі коэффициенті $\frac{1}{2}$ болатын гомотетиядан $PQR$ шеңберінің центрі $XY$ кесіндісінің ортасы болады, оны $M$ дейік. $N$ — $AB$ кесіндісінің ортасы. Бұл нүкте $Y$-тан $AB$-ға түсірілген перпендикулярдың табаны екенін байқауға болады.
$MN = MQ$ екенін дәлелдейік. $M$ нүктесінен $AB$ кесіндісіне перпендикуляр түсірейік, табаны $T$ болсын, онда $TQ/TN = MX/MY = 1$. Сондықтан, $TQ = TN$, және де $MT$ $QN$-ға перпендикуляр болғандықтан, $MN = MQ$, яғни $MN = MQ = MP = MR$. Онда $N, P, Q, R$ бір шеңбер бойында жатады. Есеп дәлелденді.

**Бағалау кестесі.**
- $YR' = YQ'$ немесе $YP' = YQ'$ дәлелі — 2 балл.
- $MP = MQ = MR$ дәлелі — 3 балл.
- $MQ = MN$ дәлелі — 2 балл.
- Алғашқы екі пункттың баллдары қосылмайды.

4. Әр екі мүшесінің айырмасы натурал санның квадраты болатындай $a_0 < a_1 < \dots < a_{a_1}$ өспелі тізбегі табылады ма?

**Жауабы:** жоқ.

**Шешімі.** Кері жору бойынша, ондай тізбек бар деп алайық. Әр $2 \le i \le a_1$ үшін $a_i - a_0 = x_i^2,\ a_i - a_1 = y_i^2$ деп белгілейік, $x_i$ және $y_i$ — теріс емес сандар.

$a_0 < a_1$ болғандықтан, $x_i^2 > y_i^2$, яғни, $x_i \geq y_i + 1$. Онда әр $2 \leq i \leq a_1$ үшін

$$a_1 - a_0 = (a_i - a_0) - (a_i - a_1) = x_i^2 - y_i^2 \geq (y_i + 1)^2 - y_i^2 = 2y_i + 1$$

орындалады. $y_2, y_3, \dots, y_{a_1}$ сандарының арасынан ең үлкенін, $y_k$-ті қарастырайық. $y_i$ — әртүрлі мәндерге ие, олардың жалпы саны $(a_1 - 1)$ болғандықтан, $y_k$ саны $(a_1 - 1)$–ден кем емес. Осылайша, $a_1 - 1 \geq a_1 - a_0 \geq 2y_k + 1 \geq 2a_1 - 1$, бірақ бұл теңсіздік еш натурал $a_1$ саны үшін орындала алмайды.

**Бағалау кестесі.**

- Әртүрлі $x_i, y_i$ үшін $a_1 - a_0 = (a_i - a_0) - (a_i - a_1) = x_i^2 - y_i^2$ дәлелденуі — 3 балл.
- Толық шешім — 7 балл.

5. $n, m$ — 1-ден артық бүтін және $a_1, a_2, \dots, a_m$ — $n^m$-нен артық наутрал сандар болсын.

$$\text{ЕҮОБ}(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_m + b_m) < n.$$

орындалатындай $b_1, b_2, \dots, b_m \leq n$ натурал сандары табылатынын дәлелдеңіз.

**Шешімі.** Жалпылықты жоғалтпай, $a_1, \dots, a_m$ сандарының ең кішісін $a_1$ деп алайық. Келесідей екі жағдайды қарастырайық: $a_1 \geq n^m - 1$ және $a_1 \leq n^m - 2$.

*1 жағдайда:* $a_1 \geq n^m - 1$ болса, барлық $i$ үшін $a_i = n^m - 1$ немесе $a_i = n^m - 1$ және $a_j = n^m$ болатындай $i$ мен $j$ табылады.

$a_i = n^m - 1$ болса, $b_1 = 1$ и $b_2 = 2$ алайық. Онда

$$\text{ЕҮОБ}(a_1 + b_1, \dots, a_m + b_m) \leq \text{ЕҮОБ}(a_1 + b_1, a_2 + b_2) = \text{ЕҮОБ}(n^m, n^m + 1) = 1 < n$$

— дәлелденді.

Басқа жағдайда $b_i = b_j = 1$ деп алайық. Онда

$$\text{ЕҮОБ}(a_1 + b_1, \dots, a_m + b_m) \leq \text{ЕҮОБ}(a_i + b_i, a_j + b_j) = \text{ЕҮОБ}(n^m, n^m + 1) = 1 < n$$

— дәлелденді.

*2 жағдайда:* $a_1 \leq n^m - 2$. Кері жору бойынша, есеп шарттары орындалатындай $(b_1, \dots, b_m)$ сандары табылмасын. Яғни, $\text{ЕҮОБ}(a_1 + b_1, \dots, a_m + b_m) \geq n$.

*1-тұжырым.* Екі әртүрлі $(b_1, \dots, b_n)$ сандар жиындары үшін олардың $\text{ЕҮОБ}(a_1 + b_1, \dots, a_m + b_m)$ мәндері де әртүрлі болады.

*1-тұжырымның дәлелдемесі.* Тұжырым қате деп алайық. Онда $b_i$ мен $b_i'$ жиындары әртүрлі болатындай, $(a_i + b_i)$ мен $(a_i + b_i')$ сандары $n$-нан кем емес ЕҮОБ-ке бөлінетіндей етіп алынсын. Онда $(a_i + b_i) - (a_i + b_i')$ да $n$-нан кем емес ЕҮОБ-ке бөлінетінеді. Яғни, $(b_i - b_i') \geq n$ орындалуы тиіс, бірақ ол мүмкін емес, себебі $b_i$ мен $b_i' \leq n$ — қайшылық. Тұжырым дәлелденді. $a_1 \leq n^m - 2$ мен $b_1 \leq n$ болғандықтан,

$$n \leq (a_1 + b_1, \dots, a_m + b_m) \leq a_1 + b_1 \leq n^m + n - 2.$$

Онда ЕҮОБ$(a_1 + b_1, \dots, a_m + b_m)$ мәндерінің саны:

$$(n^m + n - 2) - (n - 1) = n^m - 1.$$

Бірақ $(b_1, \dots, b_m)$ жиындарының саны $n^m$-не тең. Дирихле принципі бойынша, ЕҮОБ$(a_1 + b_1, \dots, a_m + b_m)$ мәне бірдей болатын екі $(b_1, \dots, b_m)$, $(b_1', \dots, b_m')$ жиындары табылады.

1-тұжырымға сәйкес, бұл мүмкін емес.

**Бағалау кестесі.**

- $a_1 \geq n^m - 1$ жағдайының дәлелденуі — 2 балл.
- 1-тұжырымның дәлелденуі — 2 балл.
- $a_1 \leq n^m - 2$ жағдайы үшін ЕҮОБ$(a_1 + b_1, \dots, a_m + b_m)$ мәндерінің мүмкін санын табылуы — 2 балл.
- $a_1 \leq n^m - 2$ жағдайының толық дәлелденуі — 5 балл.
- Толық шешім — 7 балл.

6. (10.6 қараңыз.)